Янковский А.П. Уточненная модель термоупругопластического динамического деформирования гибких армированных цилиндрических оболочек // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 6. С. 158–169. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.14

Yankovskii A.P. Refined model of thermoelastic-plastic dynamic deformation of flexible reinforced cylindrical shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 6, pp. 158-169. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.14

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 6, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.14
УДК 539.4

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 30 мая 2023 г.
Одобрена: 04 сентября 2023 г.
Принята к публикации:
31 ноября 2023 г.

Ключевые слова:

гибкие цилиндрические оболочки, армирование волокнами, термоупругопластичность, связанная задача, динамическое нагружение, теория Амбарцумяна, уточненная теория изгиба, температурный отклик, явная численная схема.

АННОТАЦИЯ

В рамках уточненной теории изгиба сформулирована связанная начально-краевая задача термоупругопластического деформирования гибких круговых цилиндрических оболочек с произвольными структурами армирования. Тангенциальные перемещения точек оболочек и температура по толщине конструкций аппроксимированы полиномами высоких порядков. Это позволяет учитывать с разной степенью точности слабое сопротивление волокнистых оболочек поперечным сдвигам и рассчитывать волновые процессы в них. Из полученных двумерных уравнений уточненной теории в первом приближении получаются соотношения традиционной неклассической теории Амбарцумяна. Геометрическая нелинейность моделируется в приближении Кармана. Неупругое деформирование компонентов композиции описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. При этом функции нагружения материалов фаз композиции зависят не только от параметра упрочнения, но и от температуры. Для численного решения поставленной нелинейной связанной двумерной термомеханической задачи используется явная схема шагов по времени. Исследовано осесимметричное упругопластическое деформирование гибких длинных цилиндрических оболочек, которые армированы в окружном и осевом направлениях. Стеклопластиковые и металлокомпозитные конструкции со стороны внутренней лицевой поверхности нагружаются давлением, которое соответствует действию воздушной взрывной волны. Показано, что для адекватного расчета температурных полей в рассматриваемых конструкциях температуру по их толщине целесообразно аппроксимировать полиномом 7-го порядка. Продемонстрировано, что в отдельных точках стеклопластиковые оболочки могут дополнительно кратковременно нагреваться всего на 10…11 °С, поэтому при их расчетах можно не учитывать тепловой отклик. Металлокомпозитные конструкции могут дополнительно нагреваться более чем на 40 °С. Однако для их расчета также можно использовать модель упругопластического деформирования материалов компонентов композиции. Показано, что при исследовании динамического неупругого поведения как стеклопластиковых, так и металлокомпозитных цилиндрических оболочек целесообразно использовать уточненную теорию их изгиба, а не простейший ее вариант – теорию Амбарцумяна.

© ПНИПУ

© **Янковский Андрей Петрович** – д.ф.-м.н., в.н.с. лаб. физики быстропротекающих процессов, e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru.

Andrey P. Yankovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research Scientist, Laboratory of Fast Processes Physics, e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

REFINED MODEL OF THERMOELASTIC-PLASTIC DYNAMIC DEFORMATION OF FLEXIBLE REINFORCED CYLINDRICAL SHELLS

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 May 2023
Approved: 04 September 2023
Accepted for publication:
31 November 2023

Keywords:

flexible cylindrical shells, fiber reinforcement, thermoelastic-plasticity, related problem, dynamic loading, Ambartsumian's theory, refined theory of bending, temperature response, explicit numerical scheme.

ABSTRACT

Within the refined theory of bending, a coupled initial-boundary value problem of thermoelastic-plastic deformation of flexible circular cylindrical shells with arbitrary reinforcement structures is formulated. The tangential displacements of the shell points and the temperature along the thickness of the structures are approximated by high-order polynomials. This makes it possible to take into account, with varying degrees of accuracy, the weak resistance of fibrous sheaths to transverse shear and to calculate wave processes in them. From the obtained two-dimensional equations of the refined theory, in the first approximation, the relations of the traditional non-classical Ambartsumian theory are obtained. The geometric nonlinearity is modeled in the Karman approximation. The inelastic deformation of the components of the composition is described by the relations of the theory of flow with isotropic hardening. In this case, the loading functions of the materials of the composition phases depend not only on the strengthening parameter, but also on the temperature. For the numerical solution of the formulated nonlinear coupled two-dimensional thermomechanical problem, an explicit scheme of time steps is used. We studied the axisymmetric elastic-plastic deformation of flexible long cylindrical shells, which are reinforced in the circumferential and axial directions. Fiberglass and metal-composite structures from the inner front surface are loaded with pressure, which corresponds to the action of an air blast wave. It is shown that for an adequate calculation of temperature fields in the structures under consideration, it is advisable to approximate the temperature over their thickness with a 7th order polynomial. It has been demonstrated that at some points fiberglass shells can additionally heat up for a short time by only 10…11 °C, so the thermal response can be disregarded in their calculations. Metal-composite structures can additionally heat up by more than 40 °C. However, for their calculation it is also possible to use the model of elastoplastic deformation of the materials of the composition components. It is shown that when studying the dynamic inelastic behavior of both fiberglass and metal-composite cylindrical shells, it is advisable to use the refined theory of their bending, rather than its simplest version, the Ambartsumian theory.

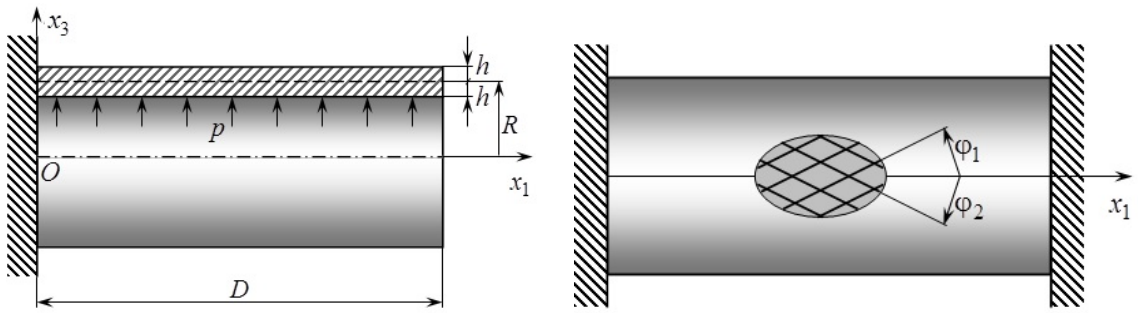
© PNRPU

Введение

Пластины и оболочки из композиционных материалов (КМ) широко используются в современной инженерии [1–6], причем они часто подвергаются интенсивному термосиловому нагружению [5–10], при котором материалы композиции могут деформироваться пластически [5; 8; 9; 11–14]. Поэтому актуальна проблема моделирования неизотермического упругопластического динамического деформирования тонкостенных элементов КМ-конструкций, которая на данный момент времени находится на стадии становления [5; 8; 9; 15–21]. В работе [21] была предложена математическая модель термоупругопластического деформирования многонаправленно армированного волокнами материала и проведены расчеты динамики гибких КМ-пластин из таких материалов. Однако аналогичное поведение оболочек до настоящего времени теоретически еще не рассматривалось.

Для моделирования волновых процессов в динамически изгибаемых тонкостенных КМ-конструкциях и учета их плохого сопротивления поперечным сдвигам традиционно используют простейшие неклассические теории Тимошенко – Рейсснера [4; 5; 8; 22–24], Амбарцумяна [21; 23; 25] и Редди [10; 26] или теории более высокого порядка точности [4; 7; 8; 20], использующие, как правило, гипотезу ломаной линии.

В [21] было показано, что при динамическом нагружении изгибаемых КМ-пластин разной относительной толщины температуру в поперечном направлении нужно аппроксимировать полиномом 7-го порядка. Изгибное же поведение армированных конструкций при этом описывалось теорией Амбарцумяна [25]. При кратковременном интенсивном силовом нагружении КМ-конструкций доминирующим источником тепловыделения служит диссипация механической энергии, представляющая собой полную свертку тензоров напряжений и скоростей деформаций [21; 27]. Поэтому, применяя различные теории изгибного поведения КМ-пластин и оболочек (Рейсснера, Редди, Амбарцумяна и более высоких порядков), можно с точностью разных порядков рассчитывать напряжения и скорости деформаций в армированных тонкостенных элементах конструкций, а значит и интенсивность тепловыделения в них. В работе [20] было показано, что упругопластическую (изотермическую) динамику армированных цилиндрических оболочек следует рассчитывать на базе уточненной теории их изгиба, а не на основе простейшего традиционно используемого ее варианта – теории Амбарцумяна. Следовательно, применение уточненной теории может привести к существенным поправкам в распределении температурного поля в таких КМ-конструкциях и их термомеханического отклика на внешние динамические нагрузки.



a *b*

Рис. 1. Цилиндрические оболочки с жестким закреплением левой кромки (*a*) и с жестким закреплением обеих кромок (*b*)

Fig. 1. Cylindrical shells with a rigid fixation of the left edge (*a*) and with a rigid fixation of both edges (*b*)

Для численного интегрирования нелинейных динамических задач изгибаемых пластин и оболочек используют явные [8; 20; 21] и неявные [9; 28] (из семейства методов Ньюмарка) пошаговые схемы.

В силу всего вышеизложенного настоящая работа посвящена математическому моделированию неизотермической упругопластической динамики армированных гибких круговых цилиндрических оболочек при использовании уточненной теории их деформирования [20]. Связанная нелинейная термомеханическая начально-краевая задача при этом численно интегрируется с применением явной пошаговой схемы [8; 20; 21].

1. Формулировка задачи и метод решения

Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку радиуса R, длиной D и толщиной $2h \ll \min(D,R)$ (рис. 1), с которой свяжем цилиндрические координаты: x_1 – осевая ($0 \le x_1 \le D$), x_2 – окружная ($0 \le x_2 < 2\pi$) и x_3 – радиальная ($R-h \le x_3 \le R+h$) координаты. Конструкция усилена N семействами волокон (возможно, пространственно) с плотностями армирования ω_k ($1 \le k \le N$). По толщине оболочки структура армирования однородна.

С каждым k-м семейством волокон свяжем ортогональную локальную систему координат $x_i^{(k)}$ так, что ось $x_1^{(k)}$ направлена вдоль траектории армирования. Ее ориентацию в пространстве x_j зададим углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ локальных осей $x_i^{(k)}$ в глобальной системе x_j ($i,j=\overline{1,3}$, $1 \le k \le N$) вычисляются по формулам (2.21) из [21].

Внешние распределенные касательные силы на лицевых поверхностях конструкции не учитываем. В случае пространственного армирования предполагается выполнение требования, предъявляемого к волокнистой структуре и изложенного в замечании в [21].

При традиционной перекрестной укладке волокон по эквидистантным цилиндрическим поверхностям (см. рис. 1, *b*, и рис. 2 при $\theta_k = \pi/2$) это требование выполняется заведомо. Согласно [20], при этом перемещения точек гибкой цилиндрической оболочки U_i и осреднённые деформации композиции ε_{ij} в рамках уточненной теории изгиба запишутся так (геометрическая нелинейность моделируется в приближении Кармана):

$$
\begin{gathered}
U_1(t,\mathbf{r}) = u_1(t,\mathbf{x}) - z\partial_1 w + \sum_{m=0}^{M} f_1^{(m)}(z)\,\overline{\varepsilon}_{13}^{(m)}(t,\mathbf{x}),\\
U_2(t,\mathbf{r}) = \frac{R+z}{R}u_2(t,\mathbf{x}) + \partial_2 w + \sum_{m=0}^{M} f_2^{(m)}(z)\,\overline{\varepsilon}_{23}^{(m)}(t,\mathbf{x}),\\
U_3(t,\mathbf{r}) = w(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}=(x_1,x_2), \quad \mathbf{r}=(x_1,x_2,x_3);
\end{gathered}
\tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{11}(t,\mathbf{r}) = \partial_1 u_1 - z\partial_1^2 w + \sum_{m=0}^{M} f_1^{(m)}(z)\,\partial_1\overline{\varepsilon}_{13}^{(m)} + \frac{1}{2}(\partial_1 w)^2,\\
\varepsilon_{22}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{R+z}\times\\
\times\left[\frac{R+z}{R}\partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + \sum_{m=0}^{M} f_2^{(m)}(z)\,\partial_2\overline{\varepsilon}_{23}^{(m)}\right] +\\
+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_2 w}{R+z}\right)^2,\\
2\varepsilon_{12}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{R+z}\left[\partial_2 u_1 - z\partial_1\partial_2 w + \sum_{m=0}^{M} f_1^{(m)}(z)\,\partial_2\overline{\varepsilon}_{13}^{(m)}\right] +\\
+\frac{R+z}{R}\partial_1 u_2 +\\
+\partial_1\partial_2 w + \sum_{m=0}^{M} f_2^{(m)}(z)\,\partial_1\overline{\varepsilon}_{23}^{(m)} + \frac{1}{R+z}\partial_1 w\partial_2 w,\\
\varepsilon_{i3}(t,\mathbf{r}) = \frac{h^2-z^2}{h^2}\sum_{m=0}^{M}\left(\frac{z}{h}\right)^m \overline{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t,\mathbf{x}),\\
x_3 \equiv R+z, \quad i=1,2, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad |z| \le h, \quad t \ge t_0,\\
\Omega = \{\mathbf{x} : 0 \le x_1 \le D,\ 0 \le x_2 < 2\pi\},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где

$$f_i^{(m)}(z) \equiv 2\left[\Phi_i^{(m)}(z) - \Phi_i^{(m+2)}(z)\right] \quad (i=1,2),$$
$$\Phi_1^{(m)}(z) \equiv \frac{z^{m+1}}{h^m(1+m)},$$
$$\Phi_2^{(m)}(z) \equiv \frac{R+z}{h^m}\Psi_m(z), \tag{3}$$
$$\Psi_m(z) \equiv \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(-1)^l R^l z^{m-l}}{m-l} - R^m \ln(R+z);$$

u_1, u_2 – перемещения точек срединной поверхности ($z=0$) в осевом и окружном направлениях; w – прогиб точек этой же поверхности; z – введенная для удобства новая радиальная координата; t_0 – начальный момент времени t; M – целое число, задающее количество слагаемых в степенной аппроксимации деформаций поперечных сдвигов ε_{i3}; Ω – область, занимаемая отсчетной поверхностью в координатах x_1 и x_2; ∂_i – оператор частного дифференцирования по координате x_i ($i=1,2$). При значении $M=0$ из равенств (1)–(3) получаются кинематические соотношения теорий Амбарцумяна [25] и Редди [10; 26]. В выражениях (1) и (2) неизвестны двумерные функции w, u_i и $\overline{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$ ($i=1,2$, $0 \le m \le M$), зависящие и от времени t.

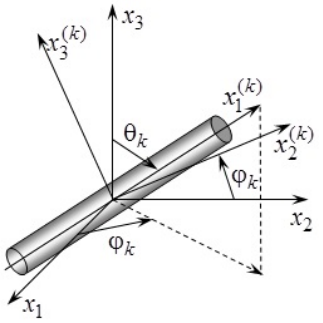


Рис. 2. Взаимная ориентация локальной (связанной с арматурой k-го семейства) и глобальной систем координат

Fig. 2. Mutual orientation of the local (associated with the reinforcement trajectory of the k-th family) and global coordinate systems

В данной работе КМ-оболочки рассматриваются как гибкие тонкостенные термомеханические системы, поэтому напряжение $\sigma_{33}(t,\mathbf{r})$ в них с приемлемой для приложений точностью можно линейно аппроксимировать по z [24];

$$\sigma_{33}(t,\mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t,\mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t,\mathbf{x})}{2h}z + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t,\mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t,\mathbf{x})}{2}, \tag{4}$$
$$\mathbf{x}\in\Omega, \quad |z| \le h, \quad t \ge t_0,$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t,\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t,\mathbf{x},\pm h)$ – нормальные напряжения на внутренней (–) и внешней (+) лицевых поверхностях конструкции, известные из силовых граничных условий.

К равенствам (2) нужно присоединить двумерные уравнения движения гибкой цилиндрической оболочки (которые при учете выражений (1), (3) и (4) описываются формулами (13)–(15) и (17) из работы [20]) и определяющие уравнения для КМ, связывающие между собой скорости усредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и температуры $\dot{\Theta}$. В данный момент времени t последние уравнения имеют следующий матричный вид [21]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \tag{5}$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \left(\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12}\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \left(\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, 2\dot{\varepsilon}_{23}, 2\dot{\varepsilon}_{31}, 2\dot{\varepsilon}_{12}\right)^{\mathrm{T}}; \tag{6}$$

6×6-матрица $\mathbf{B} = \left(b_{ij}\right)$ и шестикомпонентный вектор-столбец $\mathbf{p} = \left(p_i\right)$ вычисляются по формулам (2.18) из [21] (которые здесь не приводятся в силу их громоздкости); точка – производная по времени t; индекс T – операция транспонирования. Элементы b_{ij} и p_i ($i,j=\overline{1,6}$) матрицы **B** и вектора **p** определяются структурой армирования (углами θ_k, φ_k и плотностями ω_k), физико-механическими характеристиками материалов фаз композиции и их текущим термомеханическим состоянием.

Согласно структуре вектор-столбцов $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (см. (6)), из третьего уравнения системы (5) выразим скорость осредненной линейной поперечной деформации:

$$\dot{\varepsilon}_{33} = b_{33}^{-1}(\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\varepsilon}_{11} - b_{32}\dot{\varepsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\varepsilon}_{23} - \\ -2b_{35}\dot{\varepsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\varepsilon}_{12}), \tag{7}$$

где скорость $\dot{\sigma}_{33}$ определяется дифференцированием по времени выражения (4), а скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в правой части получаются путем дифференцирования по t аппроксимаций (2), т.е. выражаются через двумерные функции w, $\dot{w}$, $\dot{u}_i$ и $\dot{\overline{\varepsilon}}_{i3}^{(m)}$ ($i=1,2$, $0 \le m \le M$).

По толщине КМ-оболочки температуру Θ представим полиномом L-го порядка [21]:

$$\Theta(t,\mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^{L}\Theta_l(t,\mathbf{x})z^l, \tag{8}$$
$$\mathbf{x}\in\Omega, \quad |z| \le h, \quad t \ge t_0,$$

где $\Theta^0 = \mathrm{const}$ – температура естественного состояния конструкции; Θ_l ($0 \le l \le L$) – двумерные функции, подлежащие определению.

Чтобы замкнуть постановку рассматриваемой связанной термоупругопластической задачи для КМ-оболочек, к соотношениям (1)–(8) нужно добавить уравнение теплового баланса (см. (4.5), (4.6) в [21]), механические (см. (24)–(26) в [20]) и тепловые (см. (4.7), (4.8) в [21]) граничные условия, заданные на кромках конструкций, а также начальные условия, заданные при $t=t_0$ (см. (27), (28) в [20] и (4.22) в [21]).

Численное решение сформулированной нелинейной связанной начально-краевой задачи будем строить с использованием явной пошаговой схемы, т.е. неизвестные функции будем вычислять в дискретные моменты времени $t = t_n$ ($n = 0,1,2,...$), причем предполагаем, что при $t = t_{n-1}$ и $t = t_n$ заданы или определены значения следующих функций [20, 21]:

$$\overset{m}{w}(\mathbf{x}) \equiv w(t_m,\mathbf{x}),\ \ \overset{m}{u_l^{(p)}}(\mathbf{x}) \equiv u_l^{(p)}(t_m,\mathbf{x}),$$
$$\overset{m}{\sigma_{ij}}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m,\mathbf{r}),\ \ \overset{m}{\sigma_{33}^{(\pm)}}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m,\mathbf{x}),\ \ \overset{n}{U^{(r)}}(\mathbf{x}) \equiv$$
$$\equiv U^{(r)}(t_n,\mathbf{x}),\ \ \overset{n}{q_i}(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n,\mathbf{r}),\ \ \overset{m}{\Theta_s}(\mathbf{x}) \equiv \Theta_s(t_m,\mathbf{x}),$$
$$\overset{n-1}{\dot{\Theta}_s}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1},\mathbf{x}),\ \ \overset{n}{q_\infty^{(\pm)}}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n,\mathbf{x}), \qquad (9)$$
$$\overset{m}{\sigma_{ij}^{(k)}}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m,\mathbf{r}),\ \ \overset{m}{\varepsilon_{ij}^{(k)}}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m,\mathbf{r}),$$
$$\overset{m}{\chi_k}(\mathbf{r}) \equiv \chi_k(t_m,\mathbf{r}),\ \ l = 1,2,\ \ 0 \le p \le M+1,\ \ i,j = \overline{1,3},$$
$$m = n-1,n,\quad 0 \le r \le L-2,\quad 0 \le s \le L,$$
$$0 \le k \le N,\quad \mathbf{x} \in \Omega,\quad |z| \le h,$$

где

$$u_l^{(p)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} U_l(t,\mathbf{r}) z^p dz,$$
$$U^{(r)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} U(t,\mathbf{r}) z^r dz,$$
$$\sigma_{ij}(t,\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{N} \omega_k \sigma_{ij}^{(k)}(t,\mathbf{r}), \qquad (10)$$
$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^{N} \omega_k,\quad l = 1,2,\quad 0 \le p \le M+1,\quad i,j = \overline{1,3},$$
$$0 \le r \le L-2;$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – тензоры напряжений и деформаций в k-м материале композиции ($k = 0$ – связующая матрица, $k \ge 1$ – волокна k-го семейства); χ_k – параметр упрочнения (Одквиста) в том же материале; U – удельная внутренняя энергия композиции; q_i – компоненты вектора осредненного теплового потока в композиции, связанные с градиентом температуры законом Фурье для армированной среды (см. (3.1)–(3.3) в [21]); $q_\infty^{(\pm)}$ – заданные значения тепловых потоков через внешнюю (+) и внутреннюю (–) лицевые поверхности КМ-конструкции. Неизвестные функции u_i, $\overline{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$ в соотношениях (1), (2) вычисляются через прогиб w и новые кинематические переменные $u_i^{(p)}$, $i = 1,2$, $0 \le p \le M+1$ (см. выражения (10)) с помощью матричного равенства (29) из [20], в котором коэффициенты не зависят от решения исследуемой задачи, т.е. вычисляются только один раз.

Производные по времени t в механической составляющей рассматриваемой связанной неизотермической упругопластической задачи аппроксимируем их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$. Это позволяет построить явную численную схему [20]. Заменив в двумерных приведенных уравнениях движения цилиндрической оболочки вторые производные по t от кинематических переменных w и $u_i^{(p)}$ их конечными разностями, при учете выражений (1), (4) и (10), а также обозначений, аналогичных (9), получим [20]:

$$\frac{2h\rho}{\Delta^2}\left(\overset{n+1}{w} - 2\overset{n}{w} + \overset{n-1}{w}\right) = \partial_1\left(\overset{n}{M_{13}^{(0)}} + \overset{n}{M_{11}^{(0)}}\partial_1\overset{n}{w} + \overset{n}{\bar{M}_{12}^{(0)}}\partial_2\overset{n}{w}\right) +$$
$$+\partial_2\left(\overset{n}{\bar{M}_{23}^{(0)}} + \overset{n}{\bar{M}_{21}^{(0)}}\partial_1\overset{n}{w} + \overset{n}{\bar{\bar{M}}_{22}^{(0)}}\partial_2\overset{n}{w}\right) - \overset{n}{M_{22}^{(0)}} + \overset{n}{\sigma_{33}^{(+)}} - \overset{n}{\sigma_{33}^{(-)}},$$
$$\frac{\rho}{\Delta^2}\left(\overset{n+1}{u_1^{(l)}} - 2\overset{n}{u_1^{(l)}} + \overset{n-1}{u_1^{(l)}}\right) = \partial_1\left(\overset{n}{M_{11}^{(l)}} - \overset{n}{M_{13}^{(l)}}\partial_1\overset{n}{w}\right) +$$
$$+\partial_2\left(\overset{n}{\bar{M}_{12}^{(l)}} - \overset{n}{\bar{M}_{23}^{(l)}}\partial_1\overset{n}{w}\right) -$$
$$-l\overset{n}{M_{13}^{(l-1)}} + l\overset{n}{M_{33}^{(l-1)}}\partial_1\overset{n}{w} - h^l\left[\overset{n}{\sigma_{33}^{(+)}} - (-1)^l\overset{n}{\sigma_{33}^{(-)}}\right]\partial_1\overset{n}{w}, \qquad (11)$$
$$\frac{\rho}{\Delta^2}\left(\overset{n+1}{u_2^{(l)}} - 2\overset{n}{u_2^{(l)}} + \overset{n-1}{u_2^{(l)}}\right) = \partial_1\left(\overset{n}{M_{21}^{(l)}} - \overset{n}{\bar{M}_{13}^{(l)}}\partial_2\overset{n}{w}\right) +$$
$$+\partial_2\left(\overset{n}{\bar{M}_{22}^{(l)}} - \overset{n}{\bar{\bar{M}}_{23}^{(l)}}\partial_2\overset{n}{w}\right) - l\overset{n}{M_{23}^{(l-1)}} + l\overset{n}{\bar{M}_{33}^{(l-1)}}\partial_2\overset{n}{w} -$$
$$-h^l\left[(R+h)^{-1}\overset{n}{\sigma_{33}^{(+)}} - (-1)^l(R-h)^{-1}\overset{n}{\sigma_{33}^{(-)}}\right]\partial_2\overset{n}{w} + \overset{n}{\bar{M}_{23}^{(l)}},$$
$$0 \le l \le M+1,\qquad \mathbf{x} \in \Omega,\qquad n = 1,2,3,\ ...,$$

где, согласно (3) и (4),

$$\rho = \rho_0\omega_0 + \sum_{k=1}^{N}\rho_k\omega_k,\qquad M_{ij}^{(l)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h}\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})z^l dz,$$
$$\bar{M}_{ij}^{(l)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h}\frac{\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})}{R+z}z^l dz,\ \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t,\mathbf{x}) \equiv$$
$$\equiv \int_{-h}^{h}\frac{\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})}{(R+z)^2}z^l dz,\ lM_{33}^{(l-1)}(t,\mathbf{x}) =$$
$$= l\int_{-h}^{h}\sigma_{33}(t,\mathbf{r})z^{l-1}dz =$$
$$= \frac{h^l}{2}\left[\left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}\right)\left(1-(-1)^l\right) + \right. \qquad (12)$$
$$\left. + \frac{l}{l+1}\left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}\right)\left(1+(-1)^l\right)\right],$$
$$l\bar{M}_{33}^{(l-1)}(t,\mathbf{x}) = l\int_{-h}^{h}\frac{\sigma_{33}(t,\mathbf{r})}{R+z}z^{l-1}dz =$$
$$= \frac{l}{2h}\left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}\right)\left(\Psi_l(h) - \Psi_l(-h)\right) + \frac{l}{2}\left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}\right)\times$$
$$\times\left(\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h)\right),$$
$$i,j = \overline{1,3},\qquad 0 \le l \le M+1;$$

$M_{ij}^{(l)}$, $\bar{M}_{ij}^{(l)}$, $\bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$ – внутренние силовые факторы в оболочке; ρ_0, ρ_k – объемные плотности связующего материала и арматуры k-го семейства; $\Delta = \text{const} > 0$ – шаг по времени t. Внешними объемными силами в уравнениях (11) пренебрегли. Напряжения в фазах композиции $\sigma_{ij}^{(k)}$ ($0 \le k \le N$) связаны с осредненными напряжениями σ_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$) в соотношениях (12) третьими равенствами (10).

Выражения (12) при учете предположений (9) позволяют вычислить в текущий момент времени t_n все силовые факторы и внешние нагрузки, которые входят в правые части уравнений (11). Поэтому, используя необходимые механические граничные условия на кромках КМ-конструкции (см. (24)–(26) в [20]), из равенств (11) по явной численной схеме можем определить значения неизвестных функций $\overset{n+1}{w}$ и $\overset{n+1}{u_i^{(l)}}$ ($i = 1,2$, $0 \le l \le M+1$) в следующий момент времени t_{n+1}.

Анализ экспериментальных данных [14; 29] показывает, что удельная теплоемкость k-го компонента композиции c_k в случае его термочувствительности может быть аппроксимирована квадратичной зависимостью от температуры [21]:

$$c_k\left(\Theta-\Theta^0\right) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}\left(\Theta-\Theta^0\right) + c_2^{(k)}\left(\Theta-\Theta^0\right)^2, \quad 0 \le k \le N, \tag{13}$$

где $c_l^{(k)}$ ($l = 0,1,2$) – известные константы материала.

Для численного интегрирования температурной составляющей исследуемой связанной задачи также применим явную пошаговую схему, используя при этом двухточечный шаблон по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. Как и в работе [21], для приведения уравнения теплопроводности КМ-оболочки к системе двумерных уравнений теплового баланса используем метод Галеркина, приняв в качестве весовых функций однородные полиномы z^m. В результате по аналогии с [21], учитывая соотношения (8)–(10), будем иметь

$$\frac{\rho}{\Delta}\left(\overset{n+1}{U^{(m)}} - \overset{n}{U^{(m)}}\right) = -\partial_1 \overset{n}{Q_1^{(m)}} - \partial_2 \overset{n}{\bar{\bar{Q}}_2^{(m)}} - \overset{n}{\bar{Q}_3^{(m)}} - \overset{n}{\bar{\bar{Q}}_3^{(m)}} + \overset{n}{W^{(m)}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \le m \le L-2, \quad n = 0,1,2,\ldots; \tag{14}$$

$$\begin{gathered} -\sum_{l=0}^{L}(-1)^l h^{l-1}\left(l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}\right)\Theta_l(t,\mathbf{x}) = \\ = \alpha^{(-)}\left(\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0\right) + q_\infty^{(-)}(t,\mathbf{x}), \\ \sum_{l=0}^{L} h^{l-1}\left(l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}\right)\Theta_l(t,\mathbf{x}) = \\ = \alpha^{(+)}\left(\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0\right) - q_\infty^{(+)}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \ge t_0; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} C_0\sum_{i=0}^{L} H(i+m)\Theta_i + \frac{C_1}{2}\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L} H(i+j+m)\Theta_i\Theta_j + \\ + \frac{C_2}{3}\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L}\sum_{l=0}^{L} H(i+j+l+m)\Theta_i\Theta_j\Theta_l = U^{(m)}(t,\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \ge t_0, \quad 0 \le m \le L-2, \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1}\left[1-(-1)^{s+1}\right], \\ Q_i^{(m)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} q_i(t,\mathbf{r}) z^m\, dz \quad (i = \overline{1,3}), \\ \bar{Q}_3^{(m)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} \frac{\partial q_3(t,\mathbf{r})}{\partial z} z^m dz = \\ = h^m\left[q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}\right] - mQ_3^{(m-1)}(t,\mathbf{x}), \\ \bar{\bar{Q}}_j^{(m)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} \frac{q_j(t,\mathbf{r})}{R+z} z^m dz \quad (j = 2,3), \\ W^{(m)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} z^m dz, \\ C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{N} c_l^{(k)}\rho_k\omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0,1,2), \\ \lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}\big|_{\Theta=\Theta(t,\mathbf{x},\pm h)}, \quad q_3^{(\pm)}(t,\mathbf{x}) \equiv q_3(t,\mathbf{x},\pm h) = q_\infty^{(\pm)}; \end{gathered} \tag{17}$$

λ_{33} – коэффициент теплопроводности композиции в поперечном направлении конструкции, который вычисляется по структурным формулам (3.2) и (3.3) в [21]; $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициент теплоотдачи на внутренней (–) и внешней (+) лицевой поверхности оболочки; $\Theta_\infty^{(\pm)}$ – температура окружающей среды со стороны той же поверхности.

Равенства (14) при учете выражений (10) и (17) – это двумерные уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах. Соотношения (15) представляют собой тепловые граничные условия на лицевых поверхностях конструкции, преобразованные с учетом аппроксимации температуры в виде (8). Равенство (16) выражает двумерные функции $U^{(m)}$ (см. (10)) через коэффициенты полинома (8) при учете разложения (13). Соотношения (15), (16) справедливы для любого момента времени $t \ge t_0$.

Используя выражения (17) и предположения (9), в текущий дискретный момент времени t_n можем вычислить правые части в уравнениях (14), поэтому при учете соответствующих тепловых граничных условий, заданных на кромках КМ-конструкции, и начальных температурных условий из этих равенств можем определить двумерные функции $\overset{n+1}{U^{(m)}}$ при $t = t_{n+1}$. Затем в момент времени t_{n+1} из уравнений (15) и (16), в которых правые части уже известны, при учете выражений (17) вычисляем коэффициенты $\overset{n+1}{\Theta_l}(\mathbf{x})$ ($0 \le l \le L$) полиномиального

представления температуры (8). Если в разложении (13) $c_1^{(k)} \neq 0$ и/или $c_2^{(k)} \neq 0$ (термочувствительность), то система уравнений (15) и (16) является нелинейной. Для линеаризации равенств (16) целесообразно применять метод переменных теплофизических параметров, аналогичный методу переменных параметров упругости. В остальных подробностях предложенная численная схема (11) и (14) при учете выражений (2), (7), (12), (17) и структурных соотношений, полученных в [21] (см. равенства (5) и (17)), реализуется так же, как описано в работах [20; 21], где продемонстрировано, что в уравнениях (11) и (14) шаг по времени Δ нужно выбирать, исходя из выполнения необходимого условия устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви [8].

2. Анализ результатов расчетов

Рассмотрим динамическое термоупругопластическое деформирование гибкой цилиндрической КМ-оболочки длиной $D = 4$ м, радиуса $R = 1$ м и толщиной $2h = 3$ см ($2h/R \approx 1/33$), которая жестко закреплена на кромках: $w = 0$, $U_i = 0$ при $x_1 = 0, D$ и $t \geq t_0$ (см. равенства (1), (10), (11) и рис. 1, *б*). До момента времени $t = t_0 = 0$ конструкция покоится ($w \equiv 0$, $\dot{w} \equiv 0$, $U_i \equiv 0$ и $\dot{U}_i \equiv 0$, $i = 1,2$) в естественном состоянии при температуре $\Theta = \Theta^0 = 20$ °C ($\mathbf{x} \in \Omega$, $|z| \leq h$ и $t < t_0$). При $t \geq t_0$ оболочка испытывает нагружение внутренним давлением $p(t)$, которое условно соответствует воздействию воздушной взрывной волны [28]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0,$$
$$-\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp\left[-\beta\left(t - t_{\max}\right)\right], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\beta = -\ln(0{,}01) / \left(t_{\min} - t_{\max}\right) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (19)$$

$p_{\max}$ – наибольшее значение $p(t)$, которое достигается при $t = t_{\max}$; $t_{\min}$ – время, при котором давление $p(t)$ становится пренебрежимо малым по сравнению с $p_{\max}$ (так, равенство (19) получено при условии $p(t_{\min}) = 0{,}01 p_{\max}$). Используя данные экспериментов [28], примем $t_{\max} = 0{,}1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

Теплообмен с воздушной средой на лицевых поверхностях КМ-оболочки реализуется при естественной конвекции ($q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$, $\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м$^2 \cdot$K) [30]); температура воздуха предполагается равной температуре естественного состояния конструкции: $\Theta_\infty^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. равенства (15)). На кромках оболочки задана температура, которая поддерживается равной Θ^0.

КМ-конструкция может быть изготовлена из эпоксисвязующего [13], армированного стеклянными волокнами [14] (стеклопластик), либо из магниевого сплава ВТ65 [29] и усилена стальной проволокой марки У8А [14] (металлокомпозиция). При активном нагружении и фиксированной температуре Θ упругопластическое поведение компонентов композиции описывается диаграммой растяжения – сжатия с линейным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E_k \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_{\mathrm{s}}^{(k)} = \sigma_{\mathrm{s}}^{(k)} / E_k, \\ \operatorname{sign}(\varepsilon)\sigma_{\mathrm{s}}^{(k)} + E_{\mathrm{s}}^{(k)}\left(\varepsilon - \operatorname{sign}(\varepsilon)\varepsilon_{\mathrm{s}}^{(k)}\right), \\ |\varepsilon| > \varepsilon_{\mathrm{s}}^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ, ε – осевое напряжение и деформация; $E_k = E_k(\Theta)$, $E_{\mathrm{s}}^{(k)} = E_{\mathrm{s}}^{(k)}(\Theta)$ – модули Юнга и упрочнения материала *k*-й фазы композиции; $\sigma_{\mathrm{s}}^{(k)} = \sigma_{\mathrm{s}}^{(k)}(\Theta)$ – предел текучести того же компонента. Физико-механические характеристики материалов композиций приведены в таблице, где ν – коэффициент Пуассона, λ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент температурного расширения, c – удельная теплоемкость, причем в скобках указаны значения температуры (Θ, °C), которым соответствует данная характеристика. В термочувствительных расчетах физико-механических характеристики аппроксимированы линейно по температурным данным, приведенным в таблице.

Физико-механические характеристики материалов фаз композиций [13, 14, 29]

Physical and mechanical characteristics of the materials of the components of the compositions [13, 14, 29]

Характеристика материала	Эпоксисвязующее	Стеклянные волокна	Магниевый сплав ВТ65 (Mg)	Стальная проволока У8А
ρ, кг/м^3	1210,0 (20) 1208,0 (40)	2520,0 (20) 2519,6 (80)	1800,0 (20) 1796,2 (100)	7800,0 (20) 7791,8 (100)
E, ГПа	2,8 (20) 2,3 (40)	86,8 (20) 86,3 (80)	43,0 (20) 38,5 (100)	210,0 (20) 195,0 (100)
ν	0,33 (20) 0,333 (40)	0,25 (20) 0,254 (80)	0,330 (20) 0,334 (100)	0,3 (20) 0,305 (100)
σ_s, МПа	20 (20) 18 (40)	4500 (20) 4400 (80)	267 (20) 219 (100)	3968 (20) 3971 (200)
E_s, ГПа	1,114 (20) 0,783 (40)	6,230 (20) 5,168 (80)	0,379 (20) 0,367 (100)	6,973 (20) 5,014 (200)
λ, Вт/(м·K)	0,243 (20) 0,240 (40)	0,89 (20) 0,86 (80)	117,23 (20) 121,42 (100)	42,7 (20) 41,7 (100)
$\alpha \cdot 10^6$, K^{-1}	68,1 (20) 70,3 (40)	2,5 (20) 2,6 (80)	20,9 (20) 22,6 (100)	12,3 (20) 13,2 (100)
c, кДж/(кг·K)	1,54 (20) 1,60 (40)	0,800 (20) 0,839 (80)	1,032 (20) 1,054 (100)	0,485 (20) 0,488 (100)

Конструкция усилена двумя ($N = 2$) семействами волокон (проволок), которые уложены в продольном x_1 и окружном x_2 направлениях с плотностями армирования $\omega_1 = 0{,}1$, $\omega_2 = 0{,}3$ соответственно. Углы армирования для такой ортогональной структуры имеют значения (см. рис. 1, *b*, и 2): $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

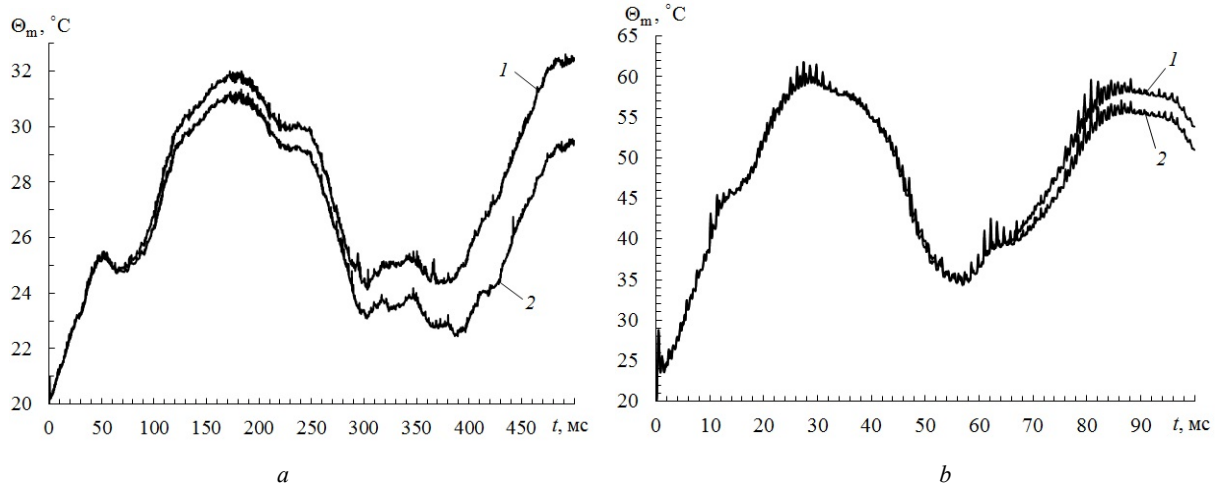


Рис. 3. Зависимости от времени наибольших значений температуры в стеклопластиковой (*a*) и металлокомпозитной (*b*) цилиндрических оболочках, рассчитанных с использованием разных теорий изгиба

Fig. 3. Time dependences of the highest temperature values in fiberglass (*a*) and metal-composite (*b*) cylindrical shells calculated using different bending theories

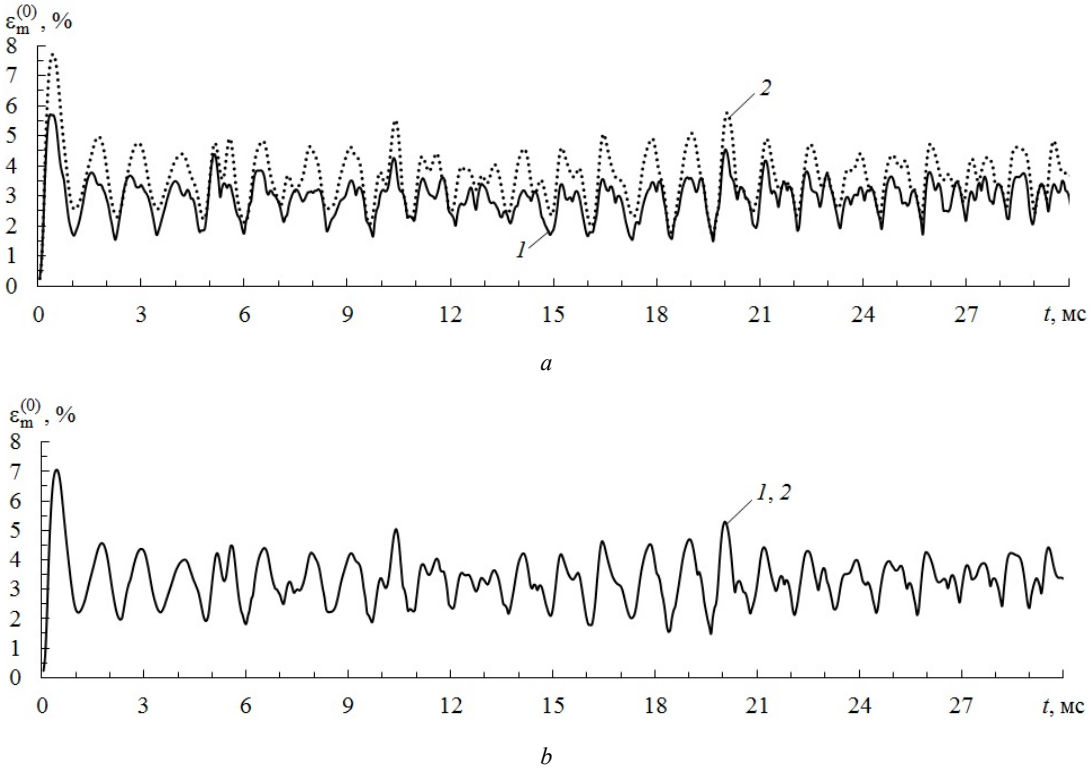


Рис. 4. Осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала в металлокомпозитной оболочке, рассчитанных по теории изгиба Амбарцумяна (*a*) и по уточненной теории (*b*)

Fig. 4. Oscillations of the maximum values of the intensity of deformations of the binder material in the metal-composite shell, calculated according to the Ambartsumian bending theory (*a*) and according to the refined theory (*b*)

В расчетах изучалось осесимметричное динамическое поведение КМ-конструкций, т.е. решение задачи не зависело от координаты x_2. При этом по осевой переменной x_1 вводилась сетка с фиксированным шагом $\Delta x_1 = D/100 = 4$ см; шаг по времени Δ для металлокомпозитной оболочки принимался равным 0,25 мкс, а для стеклопластиковой – 1 мкс. При такой дискретизации задачи необходимые условия устойчивости разработанной в разделе 1 численной схемы выполняются с запасом (см. соотношения (6.3) в [21]). Для Mg–У8А-конструкции расчеты выполнялись на интервале времени $0 \le t \le 100$ мс, а для стеклопластиковой оболочки – на интервале $0 \le t \le 500$ мс.

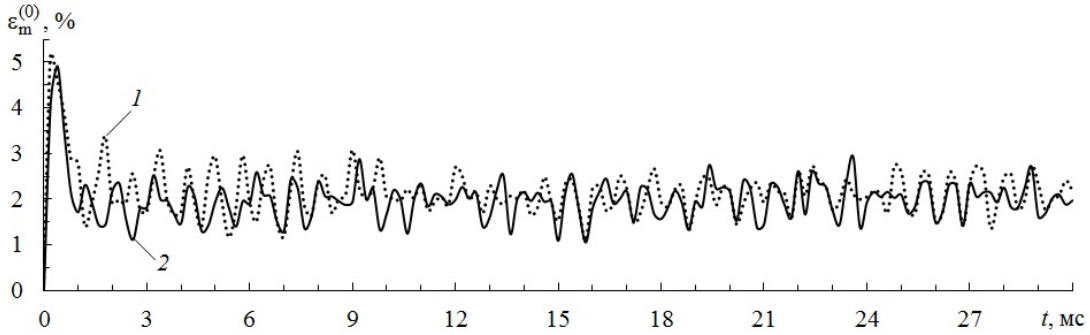


Рис. 5. Осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала в стеклопластиковой оболочке, рассчитанных с применением разных теорий изгиба

Fig. 5. Oscillations of the maximum values of the intensity of deformations of the binder material in the fiberglass shell, calculated using different bending theories

В работе [21] исследовалась сходимость полиномиального разложения температуры (8). С этой целью было проанализировано поведение зависимостей наибольших значений $\Theta_{\max}\left(L\right)=\max\limits_{t,\mathbf{r}}\Theta\left(t,\mathbf{r};L\right)$ от порядка частичной суммы L. В [21] было продемонстрировано для динамически деформируемых КМ-пластин различной относительной толщины при переходе от значения $L=6$ (см. (8)) к $L=7$ приращение величины $\Theta_{\max}$ с практической точки зрения можно считать пренебрежимо малым (см. рис. 3 в [21]). При значения $L\geq 8$ линеаризованная система уравнений (15) и (16), из которой с учетом (17) вычисляются коэффициенты степенного представления температуры (8) и которая полностью совпадает с соответствующими равенствами в [21], становится плохо обусловленной. Это приводит к тому, что при $L\geq 8$ зависимости $\Theta_{\max}\left(L\right)$ являются расходящимися. Предварительно проведенные расчеты продемонстрировали, что при различных значениях $M\geq 0$ в аппроксимациях (1) и (2) этот результат остается справедливым и для исследуемых цилиндрических армированных оболочек (соответствующие зависимости $\Theta_{\max}\left(L,M\right)$ здесь не приведены). Согласно этому, в обсуждаемых ниже расчетах в разложении (8) принято $L=7$.

Ранее в работе [20] было показано, что при изотермическом динамическом упругопластическом деформировании цилиндрических КМ-оболочек для адекватного моделирования их изгибного поведения в кинематических соотношениях (1), (2) следует задавать не $M=0$ (теория Амбарцумяна), а $M=6$ или $M=7$ (т.е. нужно использовать уточненную теорию изгиба). Выбор значений $M=6,\,7$ в равенствах (1) и (2) объясняется качественно аналогичными причинами, что и выбор значений $L=6,\,7$ в разложении (8) (подробнее см. [20]).

Как уже отмечалось во введении, в настоящем исследовании изучается влияние использования уточненной теории изгиба (см. соотношения (1), (2) и (11) при $M=7$) на расчет термоупругопластического динамического поведения гибких цилиндрических КМ-оболочек. Согласно этому, на рис. 3 приведены зависимости наибольших значений температуры $\Theta_{\text{m}}\left(t;M\right)=\max\limits_{\mathbf{r}}\Theta\left(t,\mathbf{r};M\right)$ ($0\leq x_1\leq D$ и $\left|z\right|\leq h$) в рассматриваемой стеклопластиковой (см. рис. 3, *а*) и металлокомпозитной (см. рис. 3, *b*) конструкциях. Кривые *1* и *2* получены соответственно при $M=0$ и $M=7$. На рис. 3, *а*, кривые рассчитаны при $p_{\max}=13$ МПа (см. (18)), а на рис. 3, *б* – при $p_{\max}=60$ МПа. При таких значениях $p_{\max}$ в обеих КМ-оболочках наблюдается неупругое деформирование всех материалов композиций. Поведение кривых на рис. 3 свидетельствует о том, что зависимости $\Theta_{\text{m}}\left(t\right)$ в случае цилиндрических оболочек являются более сложными, чем в случае КМ-пластин (см. рис. 4 в [21]). Кривые на рис. 3, *а*, показывают, что стеклопластиковая оболочка в процессе осцилляций в отдельных точках нагревается не более чем на 11…13 °С. Кривые же на рис. 3, *b*, демонстрируют, что металлокомпозитная оболочка при динамическом деформировании может нагреваться в отдельных точках более чем на 40 °С.

Сравнение кривых *1* и *2* на рис. 3 свидетельствует о том, что температурные поля в цилиндрических КМ-оболочках, рассчитанные с использованием теории Амбарцумяна (см. кривые *1*) и уточненной теории изгиба (см. кривые *2*), с течением времени все больше различаются, причем теория Амбарцумяна приводит к завышению температурного отклика. Поэтому есть основания предполагать, что широко используемая в расчетной практике неклассическая теория изгиба Амбарцумяна в случае неизотермического упругопластического динамического деформирования гибких цилиндрических КМ-оболочек может оказаться малопригодной для проведения соответствующих расчетов.

Последнее предположение подтверждают расчеты деформированного состояния компонентов композиций рассматриваемых КМ-конструкций. Так, на рис. 4 изображены зависимости от времени максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала

$\varepsilon_*^{(0)}$ ($\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}(t) = \max\limits_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t,\mathbf{r})$, $0 \le x_1 \le D$ и $|z| \le h$) в Mg–У8А-оболочке, рассчитанные по теории Амбарцумяна (рис. 4, *a*) и по уточненной теории изгиба (рис. 4, *b*). Сплошные кривые *1* определены по термоупругопластической теории, а пунктирные кривые *2* – по упругопластической теории (без учета теплового отклика в КМ-конструкции). На рис. 4, *b*, кривые *1* и *2* визуально практически неразличимы на рассматриваемом интервале времени.

Сопоставление кривых *1* и *2* на рис. 4, *a*, демонстрирует, что, согласно расчетам, выполненным по теории Амбарцумяна, неучет теплового отклика в металлокомпозитной оболочке может привести к существенному искажению деформированного состояния ее связующей матрицы. Например, максимум на кривой *2*, достигаемый при $t = 0{,}45$ мс, больше аналогичной величины на кривой *1* на 35,1 %. Сравнение же кривых *1* и *2* на рис. 4, *b*, показывает, что, согласно расчетам, выполненным по уточненной теории изгиба, неучет теплового отклика в рассматриваемой Mg–У8А-конструкции, наоборот, практически не оказывает влияния на деформированное состояние связующего материала в ней. Сопоставление значений $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}$ при $t = 0{,}45$ мс, соответствующих глобальным максимумам на кривых *1* рис. 4, *a* и *b*, свидетельствует, что термоупругопластический расчет с применением теории Амбарцумяна (см. рис. 4, *a*) занижает эту величину на 19,4 % по сравнению с использованием уточненной теории (см. рис. 4, *b*). Сравнение же аналогичных значений $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}$ при $t = 0{,}45$ мс на кривых *2* рис. 4, *a* и 4, *b*, показывает: упругопластический расчет на базе теории Амбарцумяна, наоборот, завышает эту величину на 8,8 % по сравнению с расчетом, выполненным с применением уточненной теории изгиба цилиндрических КМ-оболочек.

На рис. 5 изображены зависимости $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}(t)$, рассчитанные для стеклопластиковой оболочки по термоупругопластической модели с использованием теории Амбарцумяна (пунктирная кривая *1*) и уточненной теории изгиба (сплошная кривая *2*). В этом случае расчеты, выполненные без учета теплового отклика, приводят к зависимостям $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}(t)$, которые визуально не отличаются от кривых, изображенных на рис. 5, что объясняется, очевидно, малым нагревом стеклопластиковой цилиндрической оболочки в процессе ее осесимметричного динамического деформирования (см. кривые *1* и *2* на рис. 3, *a*). Сравнение кривых *1* и *2* на рис. 5 показывает, что для стеклопластиковой конструкции зависимости $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}(t)$, полученные по теории Амбарцумяна и по уточненной теории изгиба, существенно различаются. Так, значение глобального максимума $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}$ на кривой *1* (при $t \approx 0{,}25$ мс) примерно на 7 % больше, чем на кривой *2* (при $t \approx 0{,}37$ мс).

Таким образом, как металлокомпозитные, так и стеклопластиковые цилиндрические оболочки при их осесимметричном динамическом термоупругопластическом деформировании целесообразно рассчитывать по уточненной теории изгиба.

В обсуждавшихся выше расчетах предполагалось, что через лицевые поверхности КМ-конструкции теплообмен с окружающей средой осуществляется в условиях естественной конвекции ($\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м$^2\cdot$K)). Однако при рассматриваемом типе нагружения цилиндрические оболочки в поперечном направлении осциллируют с высокой частотой, поэтому можно предположить, что на их лицевых поверхностях теплообмен с окружающей средой следует моделировать не в условиях естественной, а в условиях вынужденной конвекции. Поэтому были проведены дополнительные расчеты динамики исследуемых КМ-оболочек при задании коэффициентов теплоотдачи на лицевых поверхностях равными $\alpha^{(\pm)} = 300$ Вт/(м$^2\cdot$K) (см. соотношения (15)), что соответствует вынужденной конвекции газов [30]. Оказалось, что рассчитанные при этом значения $\Theta_{\mathrm{m}}(t;M)$ отличаются от ранее полученных, т.е. определенных при естественно конвекции (см. рис. 3), только в четвертой значащей цифре. Следовательно, увеличение на лицевых поверхностях коэффициентов теплоотдачи в 10 раз фактически не влияет на результаты расчетов термоупругопластического динамического деформирования изучаемых КМ-оболочек на исследуемых, достаточно малых интервалах времени, на которых тепловые процессы в армированных конструкциях можно рассматривать как адиабатические, не учитывая кондукторную составляющую процессов теплопереноса в них.

Заключение

Разработанная модель термоупругопластического деформирования гибких круговых цилиндрических оболочек с произвольными волокнистыми структурами позволяет с разной степенью точности аппроксимировать в их поперечном направлении температуру и тангенциальные перемещения.

Анализ термоупругопластического динамического поведения гибких КМ-оболочек продемонстрировал, что температурный отклик в них, по сравнению с гибкими КМ-пластинами [21], является более сложным. Расчеты показали, что при осесимметричном динамическом деформировании стеклопластиковые цилиндрические оболочки дополнительно нагреваются в отдельных точках не более чем на 10…11 °C, а металлокомпозитные оболочки могут нагреваться более чем на 40 °C. При указанных условиях деформирования механическое поведение как стеклопластиковых, так и металлокомпозитных цилиндрических оболочек можно рассчитывать без учета возникающих в них температурных полей, если отсутствуют источники тепла немеханического происхождения. При этом для обоих

типов композиций расчет неупругой динамики цилиндрических КМ-оболочек целесообразно проводить с использованием уточненной теории их изгиба [20], а температурные поля, если требуется их определение, следует аппроксимировать полиномами 6–7-го порядков по поперечной координате [21].

Библиографический список

1. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // Composites. – 2001. – Part A 32. – P. 901–910.

2. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines / A.P. Mouritz, E. Gellert, P. Burchill, K. Challis // Compos. Struct. – 2001. – Vol. 53, no. 1. – P. 21–42.

3. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Compos. Struct. – 2010. – Vol. 93. – P. 14–31.

4. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. – Amsterdam: Elsever, 2013. – 412 p.

5. Прикладные задачи механики цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов, В.П. Георгиевский, А.Я. Недбай, В.А. Андрюшин. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.

6. Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах. – М.: Физматлит, 2019. – 448 с.

7. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 2. – С. 33–42.

8. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.

9. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol. 46. – P. 807–817.

10. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. – Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.

11. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52. – P. 1579–1587.

12. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // Frontiers of Mechanical Eng. – 2013. – Vol. 8, no. 2. – P. 187–200.

13. Справочник по композитным материалам: 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

14. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.

15. Ахундов В.М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 539–558.

16. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle / L. Brassart, L. Stainier, I. Doghri, L. Delannay // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol. 36. – P. 86–112.

17. Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // Int. J. Impact Eng. – 2014. – Vol. 67. – P. 27–38.

18. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 4rd ed. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. – 815 p.

19. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 483–508.

20. Янковский А.П. Моделирование динамического поведения армированных цилиндрических оболочек при упругопластическом деформировании материалов компонентов композиции // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 133–146.

21. Янковский А.П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // ПММ. – 2022. – Т. 86, № 1. – С. 121–150. DOI: 10.31857/S003282352201009X

22. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // Quarterly of Applied Mathematics. – 1955. – Vol. 13, no. 2. – P. 169–176.

23. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.

24. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.

25. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

26. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.

27. Грешнов В.М. Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов. – М.: Физматлит, 2018. – 232 с.

28. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Computers & Structures. – 1987. – Vol. 26, no. 1/2. – P. 1–15.

29. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н.И. Безухов, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Синюков; под ред. И.И. Гольденблата. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.

30. Теплотехника: учеб. для вузов / В.Н. Луканин, М.Г. Шатров, Г.М. Камфер, С.Г. Нечаев, И.Е. Иванов, Л.М. Матюхин, К.А. Морозов; под ред. В.Н. Луканина. – 4-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 671 с.

References

1. Bannister, M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective, *Composites*, 2001, part A 32, pp. 901-910.

2. Mouritz, A.P., Gellert, E., Burchill, P., Challis, K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21-42.

3. Qatu, M.S, Sullivan, R.W., Wang, W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Composite Structures*, 2010, vol. 93, pp. 14-31.

4. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. *Amsterdam, Elsever*, 2013, 412 p.

5. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. *Moskva, Fizmatlit*, 2014, 408 p.

6. Dimitrienko Yu.I. Mekhanika kompozitnykh konstruktsiy pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite structures at high temperatures]. *Moskva, Fizmatlit*, 2019, 448 p.

7. Kulikov, G.M. Termouprugost' gibkikh mnogosloinykh anizotropnykh obolochek [Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells]. *Izv. RAN. MTT – Mechanics of Solids*, 1994, no. 2, pp. 33-42.

8. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Nelinejnye zadachi dinamiki kompositnykh konstrukcij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. *Nizhniy Novgorod, Publ Nizhniy Novgorod State University,* 2002, 400 p.

9. Kazanci, Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 807-817.

10. Andreev A.N. Uprugost′ i termouprugost′ sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaia model i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. *Saarbrucken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing*, 2013. 93 p.

11. Leu, S.-Y., Hsu, H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2010, vol. 52, pp. 1579-1587.

12. Gill, S.K., Gupta, M., Satsangi, P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites, *Frontiers of Mechanical Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187-200.

13. Lubin G. Handbook of composites. *New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc.*, 1982, 442 p.

14. Karpinos D.M. Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]. *Kiev, Naukova dumka*, 1985, 592 p.

15. Akhundov, V.M. Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations, *Mechanics of composite materials*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 539-558.

16. Brassart, L., Stainier, L., Doghri, I., Delannay, L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle, *International Journal of Plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86-112.

17. Alderliesten, R.C., Benedictus, R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review, *Int. J. Impact Eng*., 2014, vol. 67, pp. 27-38.

18. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 4rd ed. *Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group*, 2015, 815 p.

19. Vena, P., Gastaldi, D., Contro, R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites, *International Journal of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 483-508.

20. Yankovskii, A.P. Modelirovaniye dinamicheskogo povedeniya armirovannykh tsilindricheskikh obolochek pri uprugoplasticheskom deformirovanii materialov komponentov kompozitsii [Modeling of dynamic behavior of reinforced cylindrical shells under elastic-plastic deformation of materials of composition components]. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2018, no. 2, pp. 133-146.

21. Yankovskii, A.P. Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates. *Mechanics of Solids,* 2022, vol. 57, no. 7, pp. 111-133. DOI: 10.3103/S0025654422070184

22. Reissner, E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169-176.

23. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. Soprotivlenie zhyestkikh polimernykh materialov [Resistance of rigid polymeric materials]. *Riga, Zinatne*, 1972, 500 p.

24. Bogdanovich A.E., Nelineinye zadachi dinamiki cilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. *Riga, Zinatne*, 1987, 295 p.

25. Ambarcumian S.A. Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells]. *Moskva, Nauka,* 1974, 446 p.

26. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed. *Boca Raton, CRC Press*, 2004, 831 p.

27. Greshnov V.M. Fiziko-matematicheskaya teoriya bol'shikh neobratimykh deformatsiy metallov [Physical and mathematical theory of large irreversible deformations of metals]. *Moskva*, *Fizmatlit*, 2018, 232 pp.

28. Houlston, R., DesRochers, C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1-15.

29. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol′denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. Raschety na prochnost′, ustoychivost′ i kolebaniya v usloviyakh vysokikh terperatur [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures]. / Ed. by I.I. Gol′denblat. *Moskva*, *Mashinostroenie*, 1965, 567 p.

30. Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A. Teplotekhnika: Ucheb. dlya vuzov [Heat engineering: Textbook for universities], ed. by V.N. Lucanin. 4th ed., rev. *Moskva*, *Higher school*, 2003, 671 p.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора 100 %.

Funding. The work was performed within the framework of a state assignment (state registration number 121030900260-6).
Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.
The contribution of the author 100 %.