Недин Р.Д., Юров В.О. О реконструкции полей предварительных напряжений в полом цилиндре // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 1. С. 75–89. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.08

Nedin R.D., Yurov V.O. On the reconstruction of prestress fields in a hollow cylinder. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 1, pp. 75-89. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.08

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 1, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.08
УДК 539.3

О РЕКОНСТРУКЦИИ ПОЛЕЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Р.Д. Недин, В.О. Юров

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 15 октября 2022 г.
Одобрена: 23 марта 2023 г.
Принята к публикации:
05 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

полый цилиндр, установившиеся колебания, МКЭ, предварительные напряжения, акустическое зондирование, чувствительность, обратная задача, реконструкция, регуляризация.

АННОТАЦИЯ

Настоящая работа посвящена развитию теоретических основ неразрушающего акустического метода идентификации неоднородных полей предварительных напряжений (ПН) в полом цилиндре в зависимости от способа зондирующего нагружения. Рассмотрена линеаризованная модель установившихся колебаний упругого тела при наличии неоднородного поля ПН произвольной структуры в стандартной и слабой постановках. На основе этой модели сформулирована задача для консольно-защемленного предварительно напряженного полого цилиндра, совершающего установившиеся осесимметричные колебания под воздействием зондирующего нагружения трех видов. Представлена соответствующая слабая формулировка задачи в цилиндрической системе координат, при которой учитываются шесть независимых компонент тензора ПН. При этом рассмотрен случай образования полей ПН посредством приложения некоторой предварительной внешней статической нагрузки. При наличии и отсутствии ПН различных типов проанализированы амплитудно-частотные зависимости, найдены резонансные и собственные частоты в широком частотном диапазоне. Численные расчеты проведены с помощью МКЭ на неравномерной сетке со сгущением в окрестности точек границы, где меняется тип граничных условий. На основе численного решения вспомогательного набора прямых задач построены поля ПН семи типов, различающиеся видами начального нагружения, наиболее часто встречающиеся на практике. С целью оценки возможности осуществления процедуры реконструкции ПН для каждого из рассмотренных типов выполнен анализ чувствительности, который показал, что для некоторых видов ПН существуют способы зондирующего нагружения и частоты колебаний, при которых наличие ПН практически не проявляется. Проведенный анализ чувствительности позволил реализовать оптимальный способ зондирующего нагружения при решении новой обратной коэффициентной задачи о восстановлении произвольных неоднородных полей ПН в рассмотренном конечном полом цилиндре на основе дополнительной информации об измеренном поле перемещений. Предложена процедура реконструкции ПН, основанная на использовании слабой постановки исходной задачи и сводящая обратную задачу к нахождению набора параметров начального напряженного состояния путем исследования плохо обусловленной алгебраической системы с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова. Представлены и проанализированы результаты вычислительных экспериментов по реконструкции шести компонент тензора ПН, предложены рекомендации по выбору оптимальных режимов акустического зондирования.

© ПНИПУ

© **Недин Ростислав Дмитриевич** – к.ф.-м.н., e-mail: rdn90@bk.ru.
Юров Виктор Олегович –к.ф.-м.н., ст. преп., e-mail: vyurov@sfedu.ru.

Rostislav D. Nedin – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: rdn90@bk.ru.
Victor O. Yurov – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer, e-mail: vyurov@sfedu.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ON THE RECONSTRUCTION OF PRESTRESS FIELDS IN A HOLLOW CYLINDER

R.D. Nedin, V.O. Yurov

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 15 October 2022
Approved: 23 March 2023
Accepted for publication:
05 April 2023

Keywords:

hollow cylinder, steady oscillations, FEM, prestress, acoustic sounding, sensitivity, inverse problem, reconstruction, regularization.

ABSTRACT

The present research is devoted to the development of the theoretical foundations of non-destructive acoustic method for identifying inhomogeneous prestress fields in a hollow cylinder, depending on the probing loading type. A linearized model of steady oscillations of an elastic body in the presence of an inhomogeneous prestress field of arbitrary nature is considered in the standard and weak formulations. On the basis of this model, we formulate a problem for a cantilever-clamped prestressed hollow cylinder that performs steady axisymmetric vibrations under three types of probing loading. A corresponding weak formulation of the problem in the cylindrical coordinate system is presented, in which six independent components of the prestress tensor are taken into account. At that, a case of prestress fields obtained by applying some initial mechanical external static load is considered. In the presence and absence of prestresses of various types, amplitude-frequency dependences are analyzed, and resonant and natural frequencies are found in a wide frequency range. Numerical calculations were carried out using the FEM on a non-uniform grid; mesh refinement is carried out in the vicinity of the boundary points, where the type of boundary conditions changes. Based on the numerical solution of an auxiliary set of direct problems, seven types of prestress fields are constructed, differing in the types of initial loading, most often encountered in practice. To assess the possibility of implementing the procedure for reconstructing prestresses of each of the considered types, a sensitivity analysis was additionally performed, which showed that for some prestress types there are frequencies and types of probing loading for which the presence of prestress is practically not manifested. The sensitivity analysis performed made it possible to implement the optimal method of probing loading when solving the inverse coefficient problem. The statement of the new inverse problem on the restoration of arbitrary inhomogeneous prestress fields in the considered finite hollow cylinder is formulated. When restoring the prestress of a given structure, the inverse problem is reduced to finding a set of parameters from an ill-conditioned algebraic system, which was studied with the help of the A.N. Tikhonov regularization method. Additional data for solving the inverse problem was obtained on the basis of probing both via a single load and via combined probing modes. It has been found that it is most effective to use a combined loading mode and use a sufficiently wide frequency range when selecting sounding frequencies. The results of computational experiments on the reconstruction of six components of the prestress tensor are presented and analyzed, and recommendations are proposed for choosing the optimal modes of acoustic sounding.

© PNRPU

Введение

Изучение деформирования и колебаний элементов конструкций с начальными (остаточными, предварительными) напряжениями необходимо не только с точки зрения исследования фундаментальных вопросов смежных проблем, но и с точки зрения решения прикладных задач. В первую очередь это связано с тем, что результаты таких исследований используются при применении различных методик неразрушающего контроля для мониторинга состояния целостности, определения повреждений, остаточных деформаций и различных дефектов в элементах конструкций в условиях эксплуатации. Предварительные напряжения (ПН) присутствуют в большинстве конструкций; они возникают в процессе изготовления или обработки (включая такие процессы, как прокатка, сварка, штамповка, термообработка, дробеструйный наклеп). В определенных случаях ПН создаются намеренно с целью улучшения эксплуатационных свойств, например, для создания сжимающих нагрузок в железобетонных конструкциях посредством предварительного растяжения арматуры; в других случаях ПН требуют выявления с целью предотвращения образования внутренних повреждений.

Как и в случае с материальной неоднородностью, наблюдается дефицит исследований, посвященных идентификации существенно неоднородных факторов начального напряженного состояния. Главным образом это связано со сложностью математического аппарата и вычислительными трудностями, возникающими на этапе постановки и решения сопутствующих обратных задач. Исследование таких задач требует создания адекватных и достаточно простых с точки зрения применения математических моделей деформирования тел с начальными напряжениями. Несколько линеаризованных подходов к моделированию ПН приведено в работе [1]. На основе этих подходов в [1–3] описан ряд методик восстановления предварительного напряженного состояния в упругих телах, в том числе из функционально-градиентных композитов, на основе метода акустического зондирования. Предлагаемые методики в основном базируются на итерационно-регуляризационных схемах решения соответствующих коэффициентных некорректных обратных задач. Такие подходы могут быть полезны при работе с неполными данными измерений (например, при наличии измерений поля перемещений на участке поверхности тела), которые можно получить в ходе проведения экспериментов по неразрушающему зондированию.

Остановимся подробнее на исследованиях, посвященных колебаниям предварительно напряженных цилиндрических структур. В работах Энгина и Сухуби [4], Ширера [5], Ву и соавт. [6] приведены исследования распространения крутильных волн в полых цилиндрах из несжимаемых высокоэластичных материалов, нагруженных в начальной конфигурации гидростатическим внутренним и внешним давлением. Во всех трех работах используется функция энергии деформации Муни – Ривлина для моделирования гиперупругого материала. В работе [6] исследовано распространение продольной осесимметричной волны в полом цилиндре из высокоэластичного функционально-градиентного материала при нагружении внутренним и внешним давлением. При этим в работе [4] численное решение волновых уравнений для крутильных колебаний бесконечной цилиндрической упругой трубы при больших внутренних и внешних давлениях получено с помощью метода Фробениуса и вариационного подхода. Вместе с тем в статье Ширера и др. [5] на основе метода Лиувилля – Грина получено аналитическое решение линеаризованного волнового уравнения, проанализированы численные результаты, иллюстрирующие влияние неоднородных начальных напряжений на дисперсионные кривые крутильных волн.

К настоящему времени выполнено также значительное количество исследований крутильных колебаний предварительно напряженных двухслойных [7] и многослойных [8] цилиндров. Подробный обзор этих и других близких исследований приводится в монографии [9]. Отметим, что случаи неоднородных цилиндров рассматривались также в [7] и других смежных работах, где начальные напряжения определялись в рамках классической линейной теории упругости, и для описания распространения волн использовалась полноценная модель наложения малых деформаций на конечные [10; 14; 15]. В работе [11] рассмотрен случай многослойного цилиндра, когда материалы слоев являются высокоэластичными, а начальные деформации и напряжения в цилиндре определены с помощью нелинейной теории упругости. Распространение крутильных волн в цилиндре описывалось при этом с использованием трехмерной линеаризованной теории деформирования тел при наличии ПН. В работе [12] исследуется прямая задача для конечного цилиндра в условиях сложного начального напряженного состояния, описываемого четырьмя компонентами ПН. На основе метода возмущений выведены формулы, позволяющие приближенно найти изменения резонансных частот, вызванные наличием заданного неоднородного поля ПН, проанализировано влияние уровней ПН на изменение собственных частот цилиндра. В [13] изучается также обратная задача по восстановлению трех параметров неоднородного поля ПН заданной структуры.

При изучении обратных задач идентификации ПН в качестве дополнительной информации могут быть использованы амплитуды перемещений, измеренные в наборе точек некоторого участка поверхности тела для нескольких частот колебаний. Однако в такой постановке обратная задача оказывается нелинейной и существенно некорректной. В отличие от этой задачи, в ряде случаев представляется возможным рассмотреть более простую линейную обратную задачу восстановления ПН по данным измерений перемещений внутри всей области, занимаемой телом. В настоящей работе исследуется задача по определению влияния нескольких заданных типов начального напряженного состояния на установившиеся колебания полого цилиндра, а также изучается обратная задача об определении шести независимых компонент неоднородного поля ПН на основе данных измерения поля перемещений в продольном сечении цилиндра.

1. Линеаризованная модель предварительно напряженного тела

Будем исходить из общей линеаризованной постановки задачи об установившихся колебаниях трехмерного упругого тела с ПН [3; 10; 14], полученной на основе наложения малых (добавочных) деформаций на конечные, и которая имеет вид:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{T}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0,\quad \mathbf{T}=\boldsymbol{\sigma}_0\cdot\nabla\mathbf{u}+\boldsymbol{\sigma},\\ &\mathbf{u}\big|_{S_u}=0,\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\big|_{S_\sigma}=\mathbf{P}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{T}$ – несимметричный добавочный тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{u}$ – вектор малых добавочных перемещений, $\boldsymbol{\sigma}_0$ – симметричный тензор ПН, ρ – плотность, ω – частота колебаний; тело жестко защемлено на части поверхности S_u, на части S_σ действует периодическая нагрузка вида $\tilde{\mathbf{P}}=\mathbf{P}e^{i\omega t}$ с амплитудой $\mathbf{P}$, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела.

Общая слабая постановка задачи (1) об установившихся колебаниях неоднородного предварительно напряженного тела конечных размеров имеет вид [3]:

$$\int_V \mathbf{T}\odot\nabla\mathbf{v}dV-\omega^2\int_V\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}dV-\int_{S_\sigma}\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}dS=0, \tag{2}$$

где $\mathbf{v}$ – пробная вектор-функция, удовлетворяющая главным граничным условиям из (1): $\mathbf{v}\big|_{S_u}=0$. При этом, так как рассматриваются стационарные колебания тела, и компоненты вектора нагрузки, как и компоненты вектора перемещений, периодичны во времени, временной множитель $e^{i\omega t}$ отделяется на этапе построения постановок (1) и (2).

Будем считать, что тело в начальной конфигурации удовлетворяет уравнениям равновесия, и ПН в нем образованы в результате приложения некоторой начальной нагрузки $\mathbf{P}_0$, прикладываемой к части поверхности S_σ^0. Соответствующие краевая задача и слабая постановка для начальной конфигурации принимают вид [3; 10]:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_0 = 0$$
$$\mathbf{u}_0\big|_{S_u^0} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_0\big|_{S_\sigma^0} = \mathbf{P}_0 \tag{3}$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}_0 \odot \boldsymbol{\varepsilon}_0^v dV - \int_{S_\sigma^0} \mathbf{P}_0\cdot\mathbf{v}_0 dS = 0 \tag{4}$$

где $\mathbf{u}_0$ – вектор малых начальных перемещений, $\mathbf{v}_0$ – пробная вектор-функция ($\mathbf{v}_0\big|_{S_u^0} = 0$), $\boldsymbol{\varepsilon}_0^v = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v}_0 + \nabla\mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\right)$ – тензор линейной начальной деформации; в исходной конфигурации тело жестко защемлено на части поверхности S_u^0 (далее рассматривается случай $S_u^0 = S_u$). С учетом малости градиента начальной деформации будем считать, что при переходе из начальной конфигурации в текущую конфигурацию изменением вектора нормали можно пренебречь.

2. Слабая постановка задачи об осесимметричных колебаниях предварительно напряженного цилиндра

На основе слабой постановки (2) для трехмерного преднапряженного упругого тела сформулируем ниже задачу о колебаниях неоднородного полого цилиндра, занимающего объем $V = \left\{r\in\left[R_1,R_2\right], \phi\in\left[0,2\pi\right], z\in\left[0,L\right]\right\}$ при наличии шести ненулевых компонент тензора ПН: $\sigma_{rr}^0, \sigma_{\phi\phi}^0, \sigma_{zz}^0, \sigma_{r\phi}^0, \sigma_{rz}^0, \sigma_{\phi z}^0$ в цилиндрической системе координат r,ϕ,z. Ограничимся при этом осесимметричной постановкой, в которой $\frac{\partial u_r}{\partial\phi} = \frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} = \frac{\partial u_z}{\partial\phi} = 0$; таким образом, вектор перемещений и градиент деформации примут вид

$$\mathbf{u} = u_r(r,z)\mathbf{e}_r + u_\phi(r,z)\mathbf{e}_\phi + u_z(r,z)\mathbf{e}_z,$$
$$\nabla\mathbf{u} = u_{r,r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + u_{\phi,r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\phi + u_{z,r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_z - \frac{u_\phi}{r}\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_r + \tag{5}$$
$$+\frac{u_r}{r}\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_\phi + u_{r,z}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_r + u_{\phi,z}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\phi + u_{z,z}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z,$$

где для сокращения записи дифференцирования по координате использовано обозначение $u_{\alpha,\psi} = \partial u_\alpha/\partial\psi$, $\alpha = r,\phi,z$, $\psi = r,z$. Для вектора пробных функций $\mathbf{v}$ и его градиента соотношения имеют вид, аналогичный (5), при замене $u\leftrightarrow v$.

Для цилиндра с переменными свойствами компоненты тензора $\mathbf{T}$ в цилиндрической системе координат принимают вид:

$$\begin{aligned}
T_r &= \sigma_{rr} + \sigma_{rr}^0 u_{r,r} - \sigma_{r\phi}^0 u_\phi r^{-1} + \sigma_{rz}^0 u_{r,z},\\
T_z &= \sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 u_{z,z} + \sigma_{rz}^0 u_{z,r}, & T_\phi &= \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{\phi\phi}^0 u_r r^{-1} + \sigma_{r\phi}^0 u_{\phi,r} + \sigma_{\phi z}^0 u_{\phi,z},\\
T_{rz} &= \sigma_{rz} + \sigma_{rr}^0 u_{z,r} + \sigma_{rz}^0 u_{z,z}, & T_{zr} &= \sigma_{rz} + \sigma_{zz}^0 u_{r,z} + \sigma_{rz}^0 u_{r,r} - \sigma_{\phi z}^0 u_\phi r^{-1},\\
T_{r\phi} &= \sigma_{r\phi} + \sigma_{rr}^0 u_{\phi,r} + \sigma_{r\phi}^0 u_r r^{-1} + \sigma_{rz}^0 u_{\phi,z}, & T_{\phi r} &= \sigma_{r\phi} - \sigma_{\phi\phi}^0 u_\phi r^{-1} + \sigma_{r\phi}^0 u_{r,r} + \sigma_{\phi z}^0 u_{r,z},\\
T_{\phi z} &= \sigma_{\phi z} + \sigma_{r\phi}^0 u_{z,r} + \sigma_{\phi z}^0 u_{z,z}, & T_{z\phi} &= \sigma_{\phi z} + \sigma_{zz}^0 u_{\phi,z} + \sigma_{rz}^0 u_{\phi,r} + \sigma_{\phi z}^0 u_r r^{-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Будем рассматривать изотропный материал цилиндра. В этом случае компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ задаются стандартным образом, в рамках обобщенного закона Гука, через коэффициенты Ламе λ, μ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda\left(u_{r,r} + u_r r^{-1} + u_{z,z}\right) + 2\mu u_{r,r}, & \sigma_{r\phi} &= \mu\left(u_{\phi,r} - u_\phi r^{-1}\right),\\
\sigma_{\phi\phi} &= \lambda\left(u_{r,r} + u_r r^{-1} + u_{z,z}\right) + 2\mu u_r r^{-1}, & \sigma_{\phi z} &= \mu u_{\phi,z},\\
\sigma_{zz} &= \lambda\left(u_{r,r} + u_r r^{-1} + u_{z,z}\right) + 2\mu u_{z,z}, & \sigma_{rz} &= \mu\left(u_{z,r} + u_{r,z}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

С учетом представлений (5)–(7) преобразуем слабую постановку (2), выполняя полное умножение тензоров второго ранга и предполагая для общности, что $S_\sigma = \partial V$. В результирующем выражении сгруппируем слагаемые при функциях переменных материальных свойств – параметров Ламе λ, μ – и шести компонентах тензора ПН σ_{ij}^0. Осуществляя интегрирование по окружной координате и рассматривая область плоского продольного сечения цилиндра $\Omega = \left\{r\in\left[R_1,R_2\right], z\in\left[0,L\right]\right\}$, $d\Omega = rdrdz$, запишем слабую постановку в виде

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\lambda K_\lambda^{uv} + \mu K_\mu^{uv} + \sigma_{r\phi}^0 K_{r\phi}^{uv} + \sigma_{rr}^0 K_{rr}^{uv} + \sigma_{\phi\phi}^0 K_{\phi\phi}^{uv} + \sigma_{zz}^0 K_{zz}^{uv} + \right.\\
&\left. + \sigma_{rz}^0 K_{rz}^{uv} + \sigma_{\phi z}^0 K_{\phi z}^{uv}\right) d\Omega - \omega^2 \int_\Omega \rho\left(u_r v_r + u_\phi v_\phi + u_z v_z\right) d\Omega -\\
&- \int_{R_1}^{R_2} \left(T_{zr} v_r + T_{z\phi} v_\phi + T_{zz} v_z\right)\Big|_{z=\{0;L\}} rdr -\\
&- \int_0^L \left(T_{rr} v_r + T_{r\phi} v_\phi + T_{rz} v_z\right) r\Big|_{r=\{R_1;R_2\}} dz = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
K_\mu^{uv} &= 2\left(u_{r,r}v_{r,r} + u_r v_r r^{-2} + u_{z,z}v_{z,z}\right) + \left(u_{r,z} + u_{z,r}\right)\left(v_{r,z} + v_{z,r}\right) +\\
&+ \left(u_{\phi,r} - u_\phi r^{-1}\right)\left(v_{\phi,r} - v_\phi r^{-1}\right) + u_{\phi,z}v_{\phi,z},\\
K_\lambda^{uv} &= \left(u_{r,r} + u_r r^{-1} + u_{z,z}\right)\left(v_{r,r} + v_r r^{-1} + v_{z,z}\right),\\
K_{r\phi}^{uv} &= \left(u_{\phi,r}v_r + u_r v_{\phi,r} - u_\phi v_{r,r} - u_{r,r}v_\phi\right) r^{-1},\\
K_{rr}^{uv} &= u_{r,r}v_{r,r} + u_{\phi,r}v_{\phi,r} + u_{z,r}v_{z,r}, \quad K_{\phi\phi}^{uv} = \left(u_r v_r + u_\phi v_\phi\right) r^{-2},\\
K_{\phi z}^{uv} &= \left(u_{\phi,z}v_r + u_r v_{\phi,z} - u_{r,z}v_\phi - u_\phi v_{r,z}\right) r^{-1},\\
K_{rz}^{uv} &= u_{\phi,z}v_{\phi,r} + u_{z,z}v_{z,r} + u_{r,r}v_{r,z} + u_{\phi,r}v_{\phi,z} + u_{r,z}v_{r,r} + u_{z,r}v_{z,z},\\
K_{zz}^{uv} &= u_{r,z}v_{r,z} + u_{\phi,z}v_{\phi,z} + u_{z,z}v_{z,z}.
\end{aligned}$$

При формулировке (8) учтено, что все рассмотренные функции не зависят от окружной координаты ϕ. Отметим, что вектор пробных функций $\mathbf{v}$ удовлетворяет тем же главным граничным условиям, что и вектор смещений $\mathbf{u}$.

Полученная выше слабая постановка (8) представляет интерес с точки зрения удобства применения численных реализаций, в том числе конечно-элементных методик, для исследования рассмотренного преднапряженного цилиндра. Преимуществом постановки (8)

также является возможность задания в явном виде произвольных *законов неоднородности* как для материальных модулей (например, при рассмотрении функционально-градиентного или слоисто-неоднородного материала цилиндра), так и для ПН (которые могут быть заданы как аналитически, с использованием решений некоторых канонических задач, так и путем предварительного численного расчета полей напряжений, отвечающих начальным состояниям различной природы – вследствие механических, тепловых или иных воздействий).

3. Влияние предварительных напряжений на динамические характеристики. Анализ чувствительности

Рассмотрим в рамках слабой постановки (8) задачу об установившихся колебаниях преднапряженного цилиндра, защемленного одним торцом при $z = 0$: $u_r = u_\phi = u_z = 0$, $v_r = v_\phi = v_z = 0$, под действием внешних колебательных *зондирующих* нагрузок $\mathbf{P}\big|_{S_\sigma}$ трех различных видов (приведены соответствующие амплитуды вектора внешней нагрузки):

{1} $P_r = 0$, $P_\phi = \dfrac{r}{R_2}\tau$, $P_z = 0$ на торце $z = L$ (крутильные колебания цилиндра под действием касательной нагрузки);

{2} $P_r = \tau$, $P_\phi = 0$, $P_z = 0$ на внутренней границе $r = R_1$ (радиальные колебания под действием нормальной нагрузки);

{3} $P_r = 0$, $P_\phi = 0$, $P_z = \tau$ на торце $z = L$ (продольные колебания под действием осевой нагрузки).

В каждом случае компоненты нагрузки выражены через некоторую задаваемую амплитуду τ.

Для описанного цилиндра рассмотрим несколько наиболее распространенных на практике типов предварительного напряженного состояния (ПНС), образованных в результате приложения начальных нагрузок различного вида (табл. 1). При этом введено в рассмотрение максимально допустимое значение напряжений ПН $\sigma_{\max}$. Компоненты вектора начальной внешней нагрузки $\mathbf{P}_0 = \left(P_r^0, P_\phi^0, P_z^0\right)$ приведены в табл. 1 лишь на тех частях границы S_σ^0, где $\mathbf{P}_0 \neq 0$, остальные части границы подразумеваются свободными от начальных напряжений. Соответствующие поля ПН $\tilde{\sigma}_{ij}^{\gamma}$, где $\gamma = \{I, II, \ldots, VII\}$ – номер начального напряженного состояния, получены на основе решения вспомогательной задачи для начальной конфигурации в рамках постановок (3)–(4). Амплитуды начального нагружения подбирались таким образом, чтобы ни одна из компонент тензора напряжений не превышала значения $\sigma_{\max}$ (за исключением, быть может, локальных областей в окрестности жесткой заделки).

Таблица 1

Типы начального нагружения

Table 1

Types of initial loading

Тип ПНС	Вид начального нагружения	Граничные условия (неописанная часть границы S_σ^0 свободна от напряжений)
$\tilde{\sigma}_{ij}^{I}$	*Раздувание* (равномерно-распределенная нормальная нагрузка на внутренней границе)	$P_r^0 = \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}\sigma_{\max}$, $P_\phi^0 = 0$, $P_z^0 = 0$ на границе $r = R_1$
$\tilde{\sigma}_{ij}^{II}$	*Радиальное сжатие* (равномерно-распределенная нормальная сжимающая нагрузка на внешней границе)	$P_r^0 = -\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2^2}\sigma_{\max}$, $P_\phi^0 = 0$, $P_z^0 = 0$ на границе $r = R_2$
$\tilde{\sigma}_{ij}^{III}$	*Осевое растяжение*	$P_r^0 = 0$, $P_\phi^0 = 0$, $P_z^0 = 0{,}8\sigma_{\max}$ на торце $z = L$
$\tilde{\sigma}_{ij}^{IV}$	*Скручивание* разнонаправленными касательными нагрузками на внутренней и внешней границах	$P_r^0 = 0$, $P_\phi^0 = -\sigma_{\max}$, $P_z^0 = 0$ на границе $r = R_1$, $P_r^0 = 0$, $P_\phi^0 = \dfrac{R_1^2}{R_2^2}\sigma_{\max}$, $P_z^0 = 0$ на границе $r = R_2$
$\tilde{\sigma}_{ij}^{V}$	*Скручивание* касательной нагрузкой на торце	$P_r^0 = 0$, $P_\phi^0 = \dfrac{r}{R_2}\sigma_{\max}$, $P_z^0 = 0$ на торце $z = L$
$\tilde{\sigma}_{ij}^{VI}$	*Сдвиг* касательной нагрузкой, приложенной на внутренней границе	$P_r^0 = 0$, $P_\phi^0 = 0$, $P_z^0 = 0{,}8\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{2R_1 L}\sigma_{\max}$ на границе $r = R_1$
$\tilde{\sigma}_{ij}^{VII}$	*Сдвиг* касательной нагрузкой, приложенной на внешней границе	$P_r^0 = 0$, $P_\phi^0 = 0$, $P_z^0 = 0{,}7\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2 L}\sigma_{\max}$ на границе $r = R_2$

Проанализируем чувствительность амплитуд колебаний цилиндра к наличию ПНС семи описанных типов при акустическом зондировании тремя способами {1}–{3}, приведенными в начале раздела. Для этого рассмотрим две группы задач:

1. Задачи при отсутствии ПН. Обозначим поля перемещений, соответствующие зондирующим нагружениям {1}, {2}, {3}, соответственно $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*$, где $\mathbf{u} = \left(u_r,\ u_\phi,\ u_z\right)$.

2. Задачи при наличии поля ПН одного из типов I–VII. Поля перемещений, отвечающие нагружениям {1}, {2}, {3}, обозначим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Ниже представлены результаты вычислительного эксперимента по расчету амплитудно-частотных характеристик и определению резонансных частот. Все расчеты проведены численно с помощью МКЭ в пакете

FreeFem++ с использованием слабой постановки задачи (8). Рассмотрен цилиндр с параметрами $R_1 = 0{,}18$ м, $R_2 = 0{,}27$ м, $L = 0{,}73$ м, $\nu = 0{,}28$, $E = 198$ ГПа, $\rho = 7884$ кг/м^3, $\sigma_{max} = 0{,}4 \cdot 10^9$ Па, $\tau = 5 \cdot 10^{-5} E$, $\mu = 0{,}5E(1+\nu)^{-1}$, $\lambda = E\nu(1+\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1}$, где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

На рис. 1 изображена зависимость $\left|\mathbf{u}_i^*(2\pi f)\right|$, где f – частота колебаний в Гц, соответствующая нагружениям $\{1\}$–$\{3\}$ для эталонного цилиндра (при отсутствии полей ПН); график демонстрирует соотношение амплитуд в абсолютном масштабе. Отметим, что резонансные частоты цилиндра при зондирующем нагружении первого типа $\{1\}$ отличаются от частот для случаев нагружений $\{2\}$ и $\{3\}$.

Для уточнения резонансных частот, полученных на основе амплитудно-частотной характеристики для каждого типа нагружения, дополнительно исследована задача по нахождению собственных частот цилиндра при наличии и отсутствии ПН. На рис. 2 изображены функции относительных амплитудно-частотных характеристик $U_1(f)$, $U_2(f)$, $U_3(f)$ для эталонного цилиндра, рассчитанных по формуле $U_i(f) = \left|\mathbf{u}_i^*(2\pi f)\right| \Big/ \left|\mathbf{u}_i^*(0)\right|$, где $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_r^2 + u_\phi^2 + u_z^2}$ – длина вектора перемещения; функции $\mathbf{u}_i^*$ вычислялись в точке $(r = R_2,\ z = L)$. Также на график нанесены первые несколько рассчитанных собственных частот (значения в Гц приведены в подписи к рисунку).

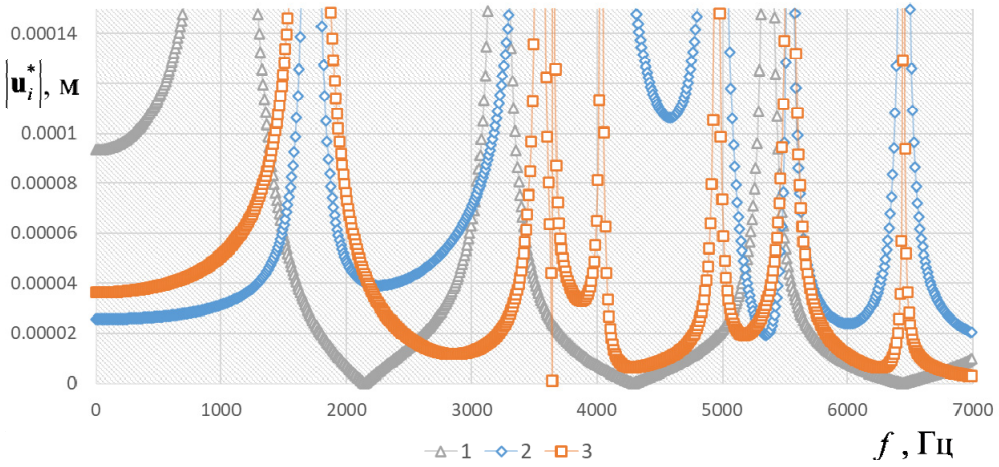


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики для эталонного цилиндра (без ПН) при трех типах динамического нагружения $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

Fig. 1. Frequency response graphs for three types of dynamic loading $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

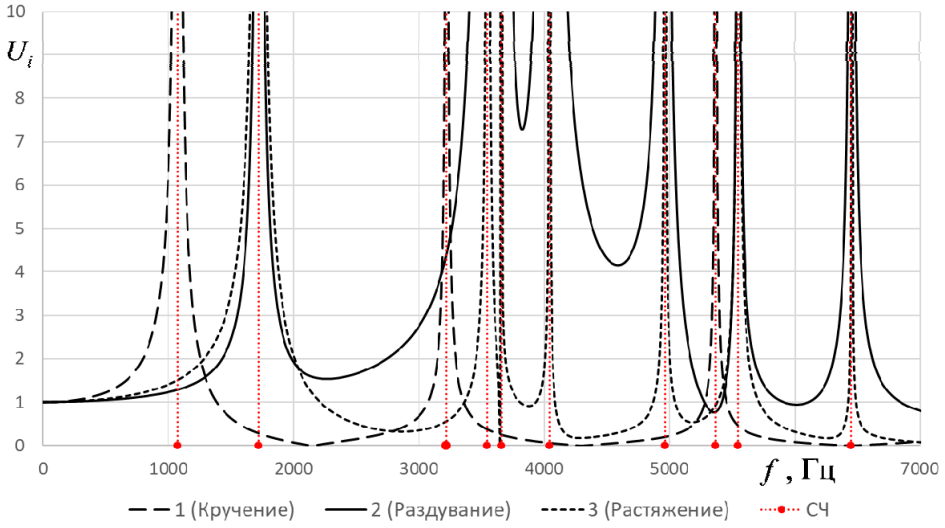


Рис. 2. Графики функций $U_1(f), U_2(f), U_3(f)$ для типов нагружения $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$; собственные частоты (Гц): $f = \{1072,\ 1722,\ 3218,\ 3545,\ 3656,\ 4037,\ 4957,\ 5363,\ 5542,\ 6447\}$

Fig. 2. Graphs of functions $U_1(f), U_2(f), U_3(f)$ ($\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ – loading types); natural frequencies (Hz): $f = \{1072,\ 1722,\ 3218,\ 3545,\ 3656,\ 4037,\ 4957,\ 5363,\ 5542,\ 6447\}$

Для проведения анализа чувствительности введены в рассмотрение функции влияния $\delta_i(r,z)=\dfrac{\left|\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_i^*\right|}{d_i}\cdot 100\,\%$, где $d_i=\max\limits_{r,z}\left|\mathbf{u}_i^*\right|$, для ПНС одного из семи рассмотренных типов, при i-м типе нагружения. Число d_i соответствует наибольшей характерной длине вектора перемещений в задаче без ПН при i-м типе нагружения. Так, $d_1=18{,}9\cdot10^{-5}$ м, $d_2=3{,}24\cdot10^{-5}$ м, $d_3=4{,}44\cdot10^{-5}$ м при частоте колебаний $f=800$ Гц, и $d_1=3{,}04\cdot10^{-5}$ м, $d_2=4{,}77\cdot10^{-5}$ м, $d_3=5{,}74\cdot10^{-5}$ м при $f=2100$ Гц. Вычисление функций $\delta_i(r,z)$ для всех типов ПН позволит определить наиболее благоприятные типы зондирующего нагружения для выявления типа ПН, а также выявить локальные зоны наибольшего и наименьшего влияния. Результаты расчета функций влияния в области Ω приведены на рис. 3, 4 в виде таблицы, где $\delta_1(r,z)$, $\delta_2(r,z)$ и $\delta_3(r,z)$ занимают соответственно 2-й, 3-й и 4-й столбцы.

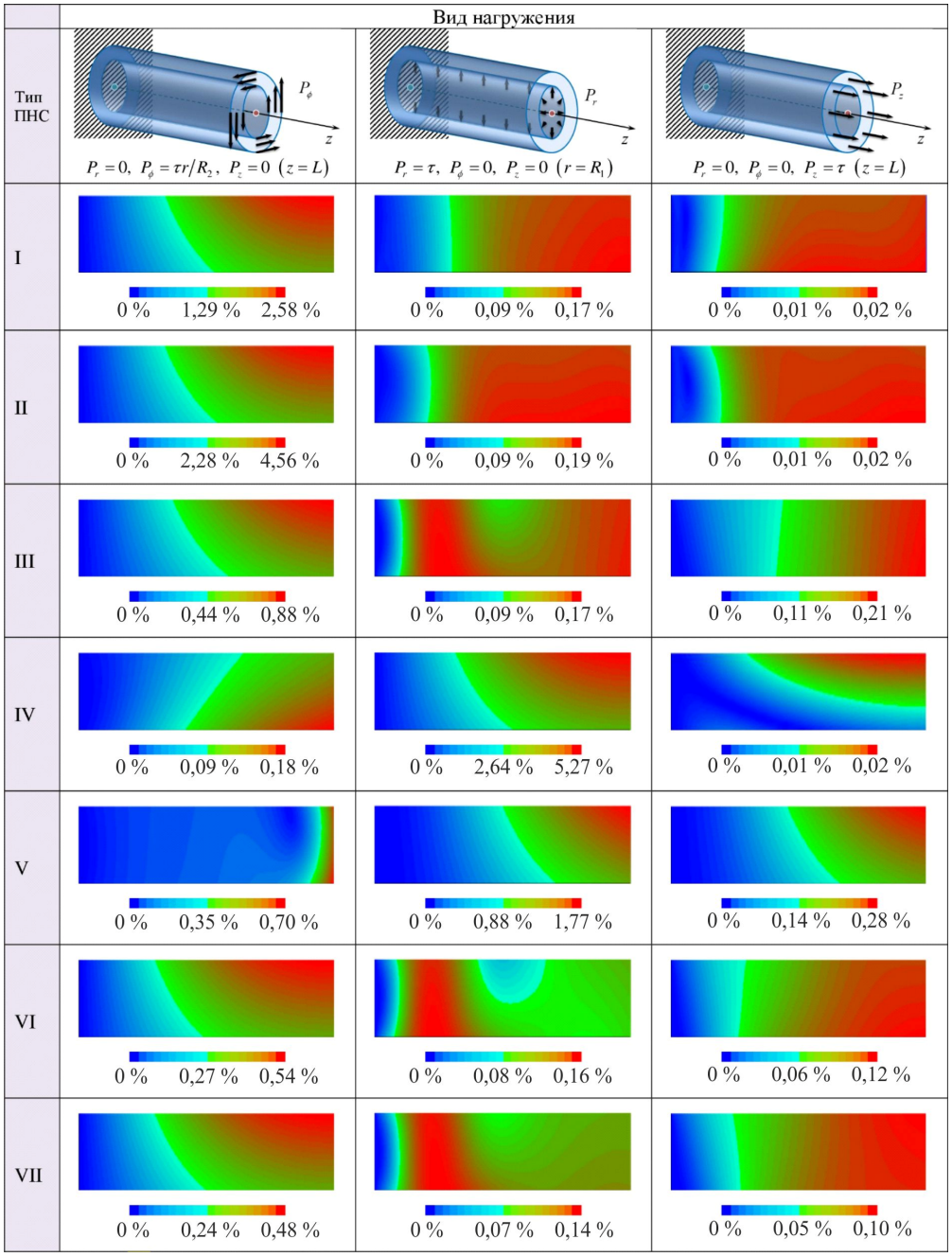


Рис. 3. Функция влияния $\delta(r,z)$ для ПНС семи типов и трех режимов динамического нагружения при частоте колебаний 800 Гц

Fig. 3. Influence function $\delta(r,z)$ for prestress states of seven types and three modes of dynamic loading at a frequency of 800 Hz

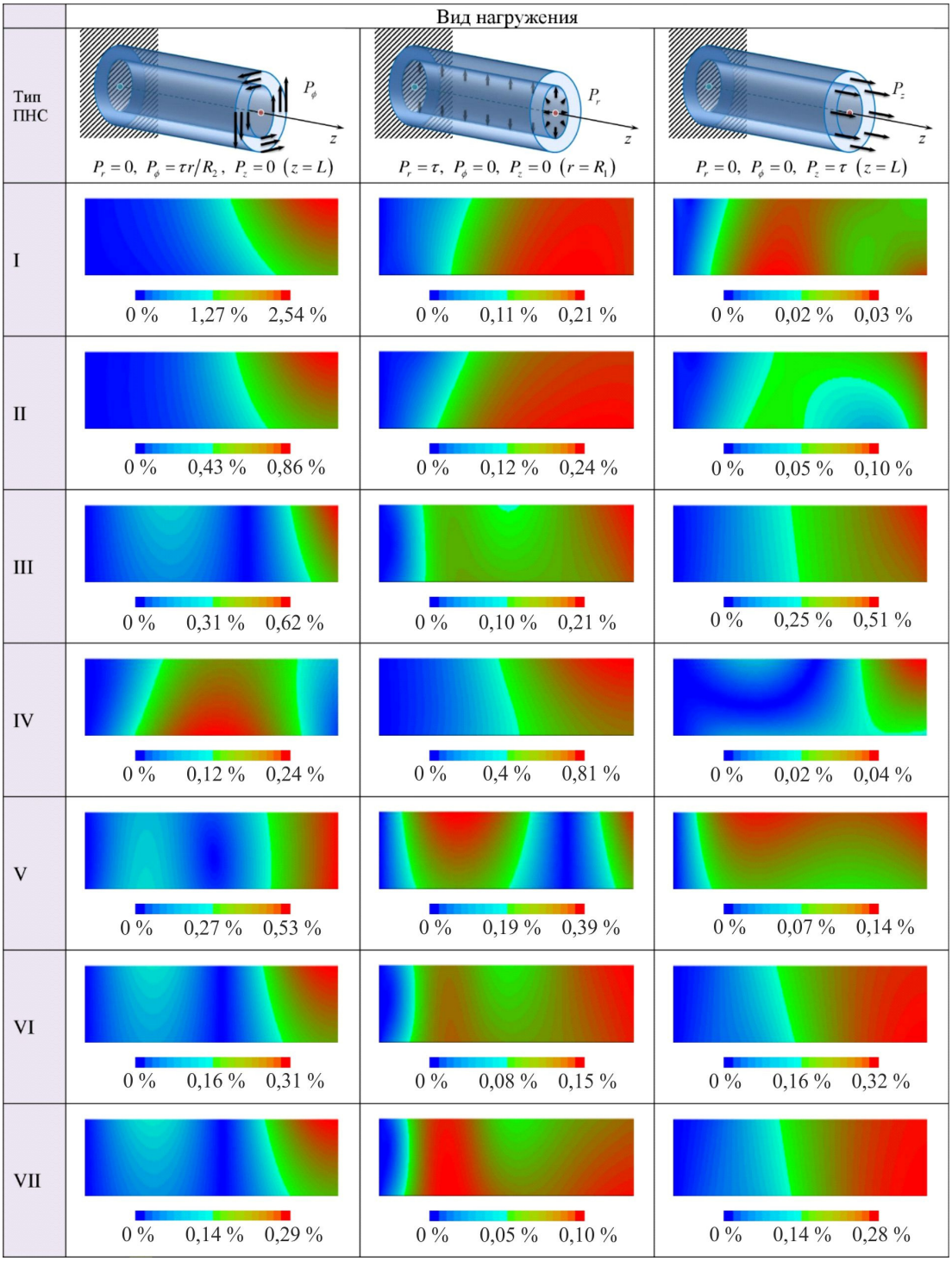


Рис. 4. Функция влияния $\delta(r,z)$ для ПНС семи типов и трех режимов динамического нагружения при частоте колебаний 2100 Гц

Fig. 4. Influence function $\delta(r,z)$ for prestress states of seven types and three modes of dynamic loading at a frequency of 2100 Hz

При этом в первом столбце указан используемый при расчете тип ПНС, в «шапке» таблицы схематично представлен способ зондирующего нагружения. Под каждой миниатюрой поля $\delta(r,z)$ приведена цветная шкала значений с указанием значения максимального влияния $\delta_{\max} = \max\limits_{r,z} \delta$; синий и красный цвета в цветовом градиенте соответствуют нулевому и максимальному влиянию соответственно. На изображениях двумерных полей влияния по оси абсцисс отложена продольная координата $z \in [0, L]$, а по оси ординат – радиальная координата $r \in [R_1, R_2]$ (при этом для наглядности на изображениях полей изменены пропорции области).

Отметим, что в вершинах ($r = R_1, z = 0$), ($r = R_2, z = 0$), с учетом специфики задания граничных условий, в ряде случаев появляются концентраторы начальных напряжений; в конечно-элементных расчетах осуществлено локальное сгущение сетки в окрестности этих точек.

Анализ результатов, приведенных на рис. 3, позволяет сделать вывод, что ПНС типов I, II и IV менее всего проявляются при зондировании растяжением (нагрузка {3}), следовательно, для реконструкции этих ПНС более эффективно будет использовать виды зондирования {1} и {2}. Вместе с тем при частоте 2100 Гц эффективность зондирования {3} повышается. Наибольшее влияние нагружение {1} оказывает на ПНС II, нагружение {2} – на ПНС IV, нагружение {3} – на ПНС V при частоте 800 Гц. При частоте колебаний 2100 Гц наибольшее влияние нагрузки {1} наблюдается на ПН II типа, нагрузки {2} – на ПН IV, нагрузки {3} – на ПН III. Отметим наличие «мертвых» областей с минимальным влиянием (показано градациями синего цвета), как, например, в окрестности границы жесткой заделки $z = 0$. Максимальное влияние чаще всего наблюдается на свободном торце цилиндра. В ряде случаев интересно отметить наличие ярко выраженных локальных областей существенного влияния, а также «мертвых» областей.

Замечание. В работе [13] были проведены расчеты функций влияния в *статическом* случае для цилиндра в условиях ПНС, описываемого *четырьмя* компонентами тензора ПН конкретного вида: $\sigma^0_{r\phi} = \varepsilon_I \dfrac{R_2^2}{r^2}$,

$$\sigma^0_{rr} = \varepsilon_{II} \frac{R_1^2\left(r^2 - R_2^2\right)}{r^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)},\ \sigma^0_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{II} \frac{R_1^2\left(r^2 + R_2^2\right)}{r^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)},\ \sigma^0_{zz} = \varepsilon_{III}.$$

4. Обратная задача об идентификации полей предварительных напряжений в цилиндре

Рассмотрим обратную задачу (ОЗ) о восстановлении 6 компонент тензора ПН, зависящих от радиальной и осевой координаты, в полом цилиндре при наличии дополнительной информации об измеренных амплитудах колебаний точек в области продольного сечения цилиндра Ω. Для ее исследования воспользуемся слабой постановкой задачи в виде (8) и заменим пробные функции компонентами поля перемещений: $v_j = u_j$, $j = r, \varphi, z$; перегруппируем слагаемые и в левой части уравнения оставим члены, содержащие искомые функции ПН, а в правую часть перенесем все остальное:

$$\int_\Omega \left(\sigma^0_{r\phi} K^{uu}_{r\phi} + \sigma^0_{rr} K^{uu}_{rr} + \sigma^0_{\phi\phi} K^{uu}_{\phi\phi} + \sigma^0_{zz} K^{uu}_{zz} + \sigma^0_{rz} K^{uu}_{rz} + \sigma^0_{\phi z} K^{uu}_{\phi z}\right) d\Omega = B^u, \tag{9}$$

где введено

$$B^u = F^u - \int_\Omega K^{uu}_{\lambda\mu}\, d\Omega, \quad K^{uu}_{\lambda\mu} = \lambda K^{uu}_{\lambda} + \mu K^{uu}_{\mu},$$

$$F^u = \omega^2 \int_\Omega \rho\left(u_r^2 + u_\phi^2 + u_z^2\right) d\Omega + \int_{R_1}^{R_2} \left(T_{zr}u_r + T_{z\phi}u_\phi + T_{zz}u_z\right)\Big|_{z=L} r dr + R_1 \int_0^L \left(T_{rr}u_r + T_{r\phi}u_\phi + T_{rz}u_z\right)\Big|_{r=R_1} dz.$$

Будем искать функции ПН в виде

$$\sigma^0_{\alpha\beta} = \varepsilon_I \tilde{\sigma}^I_{\alpha\beta} + \varepsilon_{II} \tilde{\sigma}^{II}_{\alpha\beta} + \varepsilon_{III} \tilde{\sigma}^{III}_{\alpha\beta} + \varepsilon_{IV} \tilde{\sigma}^{IV}_{\alpha\beta} + \varepsilon_V \tilde{\sigma}^V_{\alpha\beta} + \varepsilon_{VI} \tilde{\sigma}^{VI}_{\alpha\beta} + \varepsilon_{VII} \tilde{\sigma}^{VII}_{\alpha\beta},$$
$$\alpha, \beta = r, \varphi, z, \tag{10}$$

где $\tilde{\sigma}^k_{\alpha\beta}$, $k = \{I, II, ..., VII\}$ – компоненты тензора ПН для рассмотренных ранее ПНС семи различных типов при фиксированной начальной нагрузке (см. табл. 1). Эти «эталонные» компоненты ПН рассчитываются заранее и служат базисом в разложении (10); коэффициенты ε_k при этом являются искомыми амплитудами, формирующими итоговую реконструкцию ПН. После подстановки ПН в виде (10) в уравнение (9) получим СЛАУ вида

$$a_{jk}\varepsilon_k = b_j,\ k = \overline{1,7},\ j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

где n – количество испытаний по частотному зондированию (в общем случае матрица СЛАУ может быть прямоугольной). Коэффициенты СЛАУ вычисляются согласно формуле

$$a_{jk} = \int_\Omega \Sigma_k\left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right) d\Omega,$$
$$\Sigma_k\left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right) = \tilde{\sigma}^k_{r\phi} K^{uu}_{r\phi} + \tilde{\sigma}^k_{rz} K^{uu}_{rz} + \tilde{\sigma}^k_{\phi z} K^{uu}_{\phi z} + \tilde{\sigma}^k_{rr} K^{uu}_{rr} + \tilde{\sigma}^k_{\phi\phi} K^{uu}_{\phi\phi} + \tilde{\sigma}^k_{zz} K^{uu}_{zz},$$

где ядра $K^{uu}_{\alpha\beta} = K^{uu}_{\alpha\beta}\left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right)$ вычисляются, исходя из решений соответствующих прямых задач $\left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right)$ для j-го испытания (эксперимента) по зондированию и для «эталонного» поля ПНС с номером $k = \{I, II, ..., VII\}$ заданного вида, а правые части имеют вид

$$b_j = F^u\left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right) - \int_\Omega K^{uu}_{\lambda\mu}\left(\lambda, \mu, u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right) d\Omega.$$

При выборе испытаний по зондированию может задаваться тип зондирующего нагружения (ЗН) или частота колебаний.

5. Вычислительные эксперименты по реконструкции полей предварительных напряжений

В этом разделе приведены результаты вычислительных экспериментов по реконструкции 6 компонент ПН в классе представлений (10) согласно описанной в предыдущем разделе методики. Для решения плохо обусловленных систем линейных уравнений (11) относительно коэффициентов ε_k, $k=\{I,II,...,VII\}$ использован метод регуляризации А.Н. Тихонова. Пусть $\varepsilon_{\max}$ – максимум среди заданных (точных значений) амплитуд ε_k. Введем относительную погрешность реконструкции по формуле $\delta_\varepsilon=\dfrac{\left|\varepsilon_k-\tilde{\varepsilon}_k\right|}{\varepsilon_{\max}}\cdot 100\,\%$, где ε_k и $\tilde{\varepsilon}_k$ – точное и восстановленное значение *k*-й амплитуды. В табл. 2–5 приведены точные данные, параметры зондирования (частоты и тип ЗН) и результаты реконструкции.

Таблица 2 соответствует эксперименту, в котором использован один тип зондирующей нагрузки – ЗН {1}, что соответствует крутильным колебаниям (см. раздел 3). Для получения квадратной СЛАУ здесь реализуется нагружение на семи частотах $f=\{500,\,800,\,1200,\,1800,\,2400,\,2800,\,3200\}$ Гц (ниже второго резонанса). Точные значения параметров ПН ε_k и соответствующей реконструкции $\tilde{\varepsilon}_k$ приведены в табл. 2. Отметим при таком типе зондирования низкую точность восстановления параметров ε_I, ε_{II} по сравнению с другими.

Таблица 2

Зондирование кручением. Результаты реконструкции ПН

Table 2

Torsion probing. Prestress reconstruction results

Параметры зондирования	ЗН {1}, $f=\{500,\,800,\,1200,\,1800,\,2400,\,2800,\,3200\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Реконструкция	0,379	0,403	0,500	0,327	0,314	0,211	0,083
δ_ε	45,9	28,1	0	10,4	2	1,57	2,43

На рис. 5 приведены графические результаты, иллюстрирующие реконструкцию полей ПН, в соответствии с полученными в табл. 2 результатами. На рисунке изображены точные распределения 6 компонент ПН σ_{ij}^0, соответствующие выбранному набору ε_k, полученные в ходе реконструкции восстановленные поля ПН σ_{ij}^{0*} (в соответствии с найденными параметрами $\tilde{\varepsilon}_k$) и поля относительной погрешности, вычисляемой по формуле $\kappa_{ij}=\dfrac{\left|\sigma_{ij}^0-\sigma_{ij}^{0*}\right|}{\max\limits_{r,z,i,j}\left|\sigma_{ij}^0\right|}\cdot 100\,\%$.

На графических изображениях двумерных полей исключена малая окрестность жесткой заделки; все поля ПН и погрешностей на рисунке выведены для подобласти $\tilde{\Omega}=\{r\in[R_1,R_2],z\in[L_0,L]\}$, где L_0 – малый отступ от жестко защемленной грани, $L_0/L\approx 0{,}1$ (использовано для более корректного отображения цветового градиента с учетом концентрации напряжений при $z=0$). Также на рисунке приведены средние по площади сечения значения погрешности ψ, вычисляемые по формуле

$$\psi=\frac{1}{F}\int_{\tilde{\Omega}}\frac{\left|\sigma_{ij}^0-\sigma_{ij}^{0*}\right|}{\max\limits_{r,z,i,j}\left|\sigma_{ij}^0\right|}drdz\cdot 100\,\%,$$

где $F=(L-L_0)(R_2-R_1)$.

Таблица 3 соответствует эксперименту, в котором использован второй тип зондирующей нагрузки (ЗН {2}), соответствующий радиальным колебаниям. При выборе частот зондирования $f=\{800,\,850,\,900,\,950,\,1000,\,1050,\,1100\}$ Гц с приемлемой точностью удалось восстановить пять из семи искомых параметров.

Исключая из системы уравнение, отвечающее $f=1100$ Гц, с погрешностью менее 10 % удается восстановить 4 параметра ε_I, ε_{II}, ε_{IV}, ε_{VI}. В третьем вычислительном эксперименте в таблице изменен набор параметров ПН; с погрешностью менее 10 % восстановлены 5 из 7 параметров. Для увеличения точности решения ОЗ затем частотный диапазон расширен с $\{800-1100\}$ Гц (частоты ниже первого резонанса) до $\{800-3200\}$ Гц (частоты ниже второго резонанса); рассмотрение такого диапазона для ЗН {2} существенно улучшило точность восстановления ПН. Ошибка в результатах реконструкции в этом случае наблюдается в третьем знаке после запятой, а погрешность не превышает 0,5 %. В последнем вычислительном эксперименте в качестве модельного примера изменена одна частота – вместо 800 Гц рассмотрено 1095 Гц, в результате чего рассмотрен набор частот $f=\{\underline{1095},\,\underline{1100},\,1400,\,2000,\,2400,\,2800,\,3200\}$ Гц, где две частоты сближены до 5 Гц (что повысило степень плохо обусловленности СЛАУ в ОЗ). Ошибка в результатах реконструкции при этом наблюдается во втором знаке, что говорит об эффективности выбранного способа зондирования.

Таблица 4 соответствует эксперименту, в котором использован третий тип зондирующей нагрузки (возбуждение осевых колебаний). Несмотря на то, что для подбора частот использован достаточно широкий частотный диапазон $f = \{800, 1100, 1400, 2000, 2400, 2800, 3200\}$ Гц, параметры ПН восстановлены с погрешностью, превышающей на порядок погрешность восстановления при зондировании {2} радиальными колебаниями (см. табл. 3, блок результатов 4); при этом погрешность восстановления всех параметров ПН не превышает 6 %. Для наглядности на рис. 6 также представлены соответствующие результаты реконструкции полей ПН.

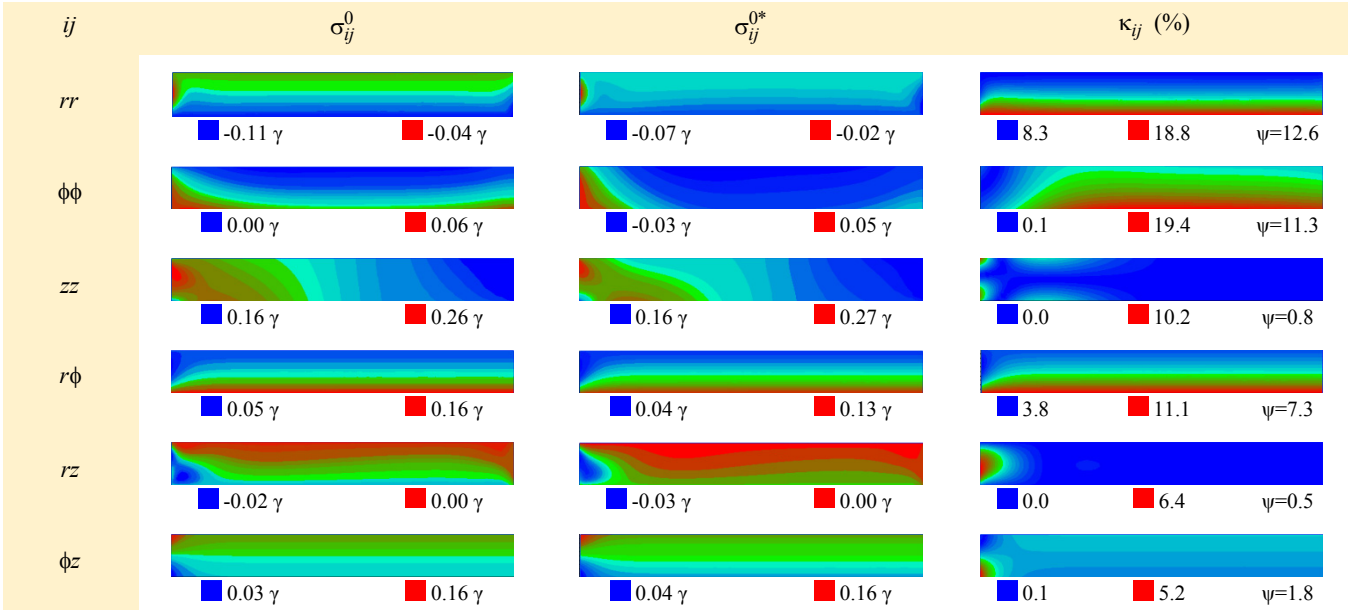


Рис. 5. Результаты реконструкции 6 компонент ПН: σ_{ij}^{0} – точные функции, σ_{ij}^{0*} – восстановленные функции (γ = 1 ГПа), κ_{ij} (%) – относительная погрешность, ψ – среднее значение погрешности

Fig. 5. Reconstruction of 6 prestress components: σ_{ij}^{0} – exact functions, σ_{ij}^{0*} – reconstructed functions (γ = 1 GPa), κ_{ij} (%) – relative error, ψ – average error value

Таблица 3

Зондирование раздуванием. Результаты реконструкции ПН

Table 3

Inflation probing. Prestress reconstruction results

Параметры зондирования	ЗН {2}, $f = \{800, 850, 900, 950, 1000, 1050, 1100\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,1	0,2	0,3	0,09	0,23	0,9	0,9
Реконструкция	0,10	0,20	0,35	0,14	0,05	0,92	0,81
δ_ε	0,00	0,00	5,56	5,56	20,00	2,22	10,00
Параметры зондирования	ЗН {2}, $f = \{800, 850, 900, 950, 1000, 1050, \otimes\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,1	0,2	0,3	0,09	0,23	0,9	0,9
Реконструкция	0,067	0,180	0,546	0,142	0,047	0,972	0,467
δ_ε	3,67	2,22	27,33	5,78	20,33	8,00	48,11
Параметры зондирования	ЗН {2}, $f = \{800, 850, 900, 950, 1000, 1050, 1100\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Реконструкция	0,702	0,601	0,454	0,447	0,133	0,183	0,186
δ_ε	0,29	0,14	6,57	6,71	23,86	2,43	12,29

Окончание табл. 3

Параметры зондирования	ЗН {2}, $f = \{800, 1100, 1400, 2000, 2400, 2800, 3200\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Реконструкция	0,097	0,197	0,302	0,3998	0,5004	0,597	0,7001
δ_ε	0,43	0,43	0,29	0,03	0,06	0,43	0,01
Параметры зондирования	ЗН {2}, $f = \{1095, 1100, 1400, 2000, 2400, 2800, 3200\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Реконструкция	0,086	0,188	0,305	0,399	0,501	0,588	0,703
δ_ε	2,00	1,71	0,71	0,14	0,14	1,71	0,43

Таблица 4

Зондирование растяжением. Результаты реконструкции ПН

Table 4

Stretch probing. Prestress reconstruction results

Параметры зондирования	ЗН {3}, $f = \{800, 1100, 1400, 2000, 2400, 2800, 3200\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Реконструкция	0,066	0,184	0,301	0,399	0,498	0,631	0,663
δ_ε	4,86	2,29	0,14	0,14	0,29	4,43	5,29

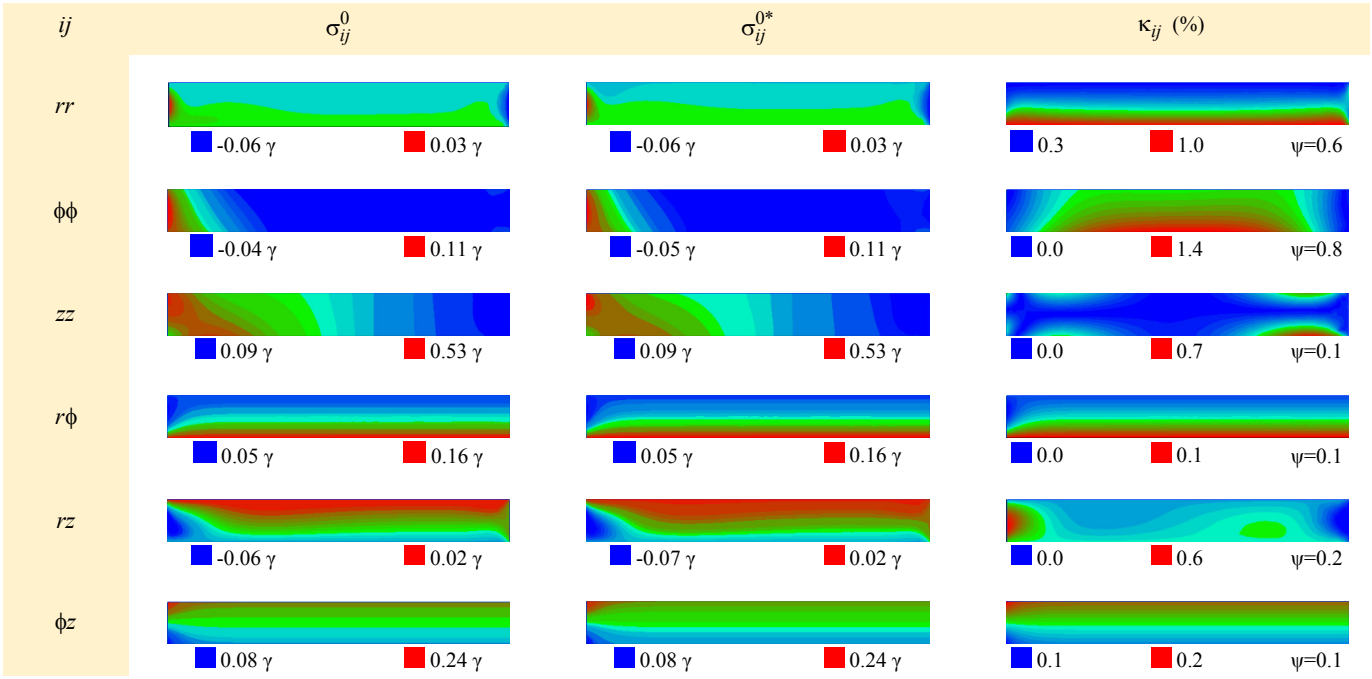


Рис. 6. Результаты реконструкции 6 компонент ПН: σ^0_{ij} – точные функции, σ^{0*}_{ij} – восстановленные функции (γ = 1 ГПа), κ_{ij} (%) – относительная погрешность, ψ – среднее значение погрешности

Fig. 6. Reconstruction of 6 prestress components: σ^0_{ij} – exact functions, σ^{0*}_{ij} – reconstructed functions (γ = 1 GPa), κ_{ij} (%) – relative error, ψ – average error value

Таблица 5

Комбинированное зондирование. Результаты реконструкции ПН

Table 5

Combined probing. Prestress reconstruction results

Параметры зондирования	ЗН {1}, $f=\{\underline{995}, \underline{1000}, 2400\}$ Гц; ЗН {2}, $f=\{1000, 2400\}$ Гц; ЗН {3}, $f=\{1000, 2400\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Реконструкция	0,674	0,584	0,501	0,382	0,305	0,234	0,060
δ_ε	3,71	2,29	0,14	2,57	0,71	4,86	5,71
Параметры зондирования	ЗН {1}, $f=\{1000, 2400\}$ Гц; ЗН {2}, $f=\{\underline{995}, \underline{1000}, 2400\}$ Гц; ЗН {3}, $f=\{1000, 2400\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Реконструкция	0,698	0,598	0,499	0,409	0,261	0,203	0,097
δ_ε	0,29	0,29	0,14	1,29	5,57	0,43	0,43
Параметры зондирования	ЗН {1}, $f=\{1000, 2400\}$ Гц; ЗН {2}; $f=\{1000, 2400\}$ Гц; ЗН {3}; $f=\{\underline{995}, \underline{1000}, 2400\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Реконструкция	0,564	0,516	0,506	0,282	0,406	0,378	-0,112
δ_ε	19,43	12,00	0,86	16,86	15,14	25,43	30,29
Параметры зондирования	ЗН {1}, $f=\{1000, 2400\}$ Гц; ЗН {2}, $f=\{1000, 2400\}$ Гц; ЗН {3}, $f=\{\underline{900}, \underline{1000}, 2400\}$ Гц						
	ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_V	ε_{VI}	ε_{VII}
Задано	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Реконструкция	0,653	0,571	0,502	0,364	0,319	0,261	0,027
δ_ε	6,71	4,14	0,29	5,14	2,71	8,71	10,43

В табл. 5 приведены некоторые результаты экспериментов для комбинированного режима зондирования. Три режима ЗН {1}–{3} реализованы на частотах $f=\{1000, 2400\}$ Гц, что позволило получить 6 уравнений СЛАУ. Заметим, что частота 1000 Гц расположена ниже первой резонансной частоты, а 2400 Гц находится в промежутке между первым и вторым резонансом как для ЗН {1}, так и для ЗН {2–3}.

Интересно отметить, что путем построения седьмого уравнения для СЛАУ на основе зондирования любой из нагрузок трех типов на частоте существенно отличающейся от 1000 и 2400 Гц удается значительно снизить степень плохо обусловленности СЛАУ (что подтверждается анализом величины определителя системы) и решить ОЗ с высокой точностью.

Ожидаемое ухудшение результатов наступает при приближении третьей частоты зондирующей нагрузки к частоте 1000 или 2400 Гц. Так, при $f=995$ Гц для ЗН {3} наблюдаются наихудшие результаты решения ОЗ (более 30 % погрешности для одной из амплитуд ПН), а при ЗН {2} на той же частоте – наилучшие результаты среди рассмотренных (менее 6 % погрешности). Погрешность решения при ЗН {1} также не превысила 6 %, а для компоненты ε_V оказалась даже ниже, чем при ЗН {2}. В последнем блоке табл. 5 продемонстрировано повышение точности решения ОЗ для ЗН {2} при снижении первой частоты с $f=995$ Гц до $f=900$ Гц; зафиксировано почти трехкратное снижение погрешности.

Заключение

Для консольно-защемленного полого цилиндра сформулирована слабая постановка задачи об установившихся осесимметричных колебаниях, учитывающая наличие полей предварительных напряжений (ПН) неоднородной структуры. Для учета ПН используется линеаризованная модель, построенная с помощью принципа наложения малых деформаций на конечные. Тензор ПН задается шестью ненулевыми компонентами, являющимися функциями радиальной и осевой координаты. Рассчитаны амплитуды колебаний цилиндра в зависимости от частоты при трех типах нагружения, найдены собственные частоты колебаний. Рассмотрено семь типов начального статического нагружения, в результате которых образованы поля ПН; эти поля построены численно как решения соответствующих вспомогательных статических задач, отвечающие выбранному начальному нагружению. Построены функции влияния, показывающие изменения поля перемещений при наличии в цилиндре поля ПН заданного типа.

Исследована новая обратная задача о нахождении шести компонент поля ПН по информации об измеренном поле амплитуд перемещений, отвечающем зондирующим нагружениям нескольких типов. Представлены и обсуждены результаты вычислительных экспериментов по реконструкции полей ПН. Приведены некоторые рекомендации по реализации эффективного режима акустического зондирования для рассмотренного предварительно напряженного конечного полого цилиндра:

- комбинированный режим зондирования, сочетающий последовательное динамическое нагружение различных типов (соответствующее радиальным, крутильным и осевым колебаниям цилиндра), обеспечивает наилучшие результаты реконструкции по сравнению с рассмотрением зондирования одного типа;
- среди отдельно рассмотренных типов зондирования наилучшие результаты реконструкции наблюдаются для колебательной нагрузки 2-го типа (радиальные колебания) при рассмотрении достаточно широкого частотного диапазона;
- рассмотрение частот зондирования ниже первого резонанса дает значительно худшую реконструкцию ПН по сравнению с выбором более широкого частотного диапазона; при этом сближение частот зондирования ухудшает результаты реконструкции. Оптимально рассматривать распределенный набор частот до третьего резонанса.

Библиографический список

1. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // Engineering Structures. – 2017. – Vol. 151. – P. 391–405.
2. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Bogachev I.V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe // Int J Solids Struct. – 2018. – Vol. 139–140. – P. 121–128.
3. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация: монография. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – 206 с.
4. Engin H., Suhubi E.S. Torsional oscillations of an infinite cylindrical elastic tube under large internal and external pressure // Int. J. Eng. Sci. – 1978. – Vol. 16. – P. 387–396.
5. Torsional wave propagation in a pre- stressed hyperelastic annular circular cylinder / T. Shearer, I.D. Abrahams, W.J. Parnell, C.H. Daros // Q. J. Mech. Appl. Math. – 2013. – Vol. 66. – P. 465–487.
6. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders / B. Wu, Y. Su, D. Liu, W. Chen, C. Zhang // J. Sound Vib. – 2018. – Vol. 421 – P. 17–47.
7. Ozturk A., Akbarov S.D. Propagation of torsional waves in a prestretched compound hollow circular cylinder // Mech. Comp. Mater. – 2008. – Vol. 44, no. 1. – P. 77–86.
8. Sahu S.A., Singh M.K., Pankaj K.K. Analyses of torsional waves in a prestressed composite structure with loosely bonded and corrugated boundaries // Mech. Comp. Mater. – 2018. – Vol. 54, no. 3. – P. 321–332.
9. Akbarov S.D. Dynamics of Pre-Strained Bimaterial Elastic Systems: Linearized Three- Dimensional Approach. – Berlin – New York: Springer, 2015.
10. Гузь А.Н. Упругие волны с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А.С.К., 2004. – 672 с.
11. Akbarov S.D., Kepceler T., Egilmez M.M. On the influence of initial strains in layers on the propagation of torsional waves in a hollow sandwich cylinder (soft core and stiff face layers) // Mech. Comp. Mater. – 2013. – Vol. 49, no. 3. – P. 297–304.
12. Yurov V.O., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Oscillations of a non-uniform finite hollow cylinder under conditions of complex prestressed state // Engineering Structures – 2020. – Vol. 221. – P. 111019.
13. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Yurov V.O. On Estimating Prestress State in an Elastic Cylinder // Advances in Solid and Fracture Mechanics / Advanced Structured Materials, Holm Altenbach, Svetlana M. Bauer, Alexander K. Belyaev, Dmitri A. Indeitsev, Valery P. Matveenko, Yuri V. Petrov (Eds). – Springer, 2022. – Vol. 180 (Published: 18 November 2022).
14. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуща О.И. Введение в акустоупругость. – Киев: Наукова думка, 1977. – 151 с.
15. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics. – Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972. – 417 p.

References

1. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. *Engineering Structures,* 2017, Vol. 151, pp. 391-405.
2. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Bogachev I.V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe. *Int J Solids Struct*, 2018, Vol. 139-140, pp. 121-128.
3. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nedin R.D. Predvaritel′nye napriazheniia: modelirovanie i identifikatsiia [Prestresses: modeling and identification]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Press, 2015, pp. 206 p.
4. Engin H., Suhubi E.S. Torsional oscillations of an infinite cylindrical elastic tube under large internal and external pressure, *Int. J. Eng. Sci*., 1978, Vol. 16, pp. 387-396.
5. Shearer T., Abrahams I.D., Parnell W.J., Daros C.H. Torsional wave propagation in a pre- stressed hyperelastic annular circular cylinder, *Q. J. Mech. Appl. Math.,* 2013, Vol. 66, pp. 465-487.
6. Wu, B., Su, Y., Liu, D., Chen, W., Zhang, C. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders, *J. Sound Vib.*, 2018, Vol. 421, pp. 17-47.
7. Ozturk A., Akbarov S.D. Propagation of torsional waves in a prestretched compound hollow circular cylinder, *Mech. Comp. Mater*., 2008, Vol. 44, No. 1, pp. 77-86.
8. Sahu S.A., Singh M.K., Pankaj K.K. Analyses of torsional waves in a prestressed composite structure with loosely bonded and corrugated boundaries, *Mech. Comp. Mater,* 2018, Vol. 54, No. 3, pp. 321-332.

9. Akbarov S.D. Dynamics of Pre-Strained Bimaterial Elastic Systems: Linearized Three- Dimensional Approach. Berlin, New York: Springer, 2015.

10. Guz N. Uprugie volny s nachal′nymi (ostatochnymi) napriazheniiami [Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses]. Kyev, A.C.K., 2004, 672 p.

11. Akbarov S.D., Kepceler T., Egilmez M.M. On the influence of initial strains in layers on the propagation of torsional waves in a hollow sandwich cylinder (soft core and stiff face layers), *Mech. Comp. Mater*, 2013, Vol. 49, No. 3, pp. 297-304.

12. Yurov V.O., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Oscillations of a non-uniform finite hollow cylinder under conditions of complex prestressed state, *Engineering Structures,* 2020, Vol. 221, pp. 111019.

13. Nedin, R.D., Vatulyan, A.O., Yurov V.O. On Estimating Prestress State in an Elastic Cylinder // Advances in Solid and Fracture Mechanics, in: Advanced Structured Materials, Holm Altenbach, Svetlana M. Bauer, Alexander K. Belyaev, Dmitri A. Indeitsev, Valery P. Matveenko, Yuri V. Petrov (Eds), Springer. 2022. – Vol. 180 (Published: 18 November 2022) https://link.springer.com/book/9783031183928

14. Guz' A.N., Makhort F.G., Gushcha O.I. Vvedenie v akustouprugost' [Introduction to Acoustoelasticity]. Kiev, Naukova dumka, 1977, 151 p.

15. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics. Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972. 417 p.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта РНФ №18-71-10045, https://rscf.ru/project/18-71-10045/.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 18-71-10045, https://rscf.ru/project/18-71-10045/.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.