Вариационно-разностное решение задач деформирования и потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим заполнителем при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях / В.Г. Баженов, Ю.А. Калинина, Е.В. Нагорных, Д.А. Самсонова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 1. – С. 45–57. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.1.05

Perm Polytech Style: Bazhenov V.G., Kalinina Yu.A., Nagornykh E.V., Samsonova D.A. Variational-Difference Solution of Deformation and Buckling Problems of Elastoplastic Shells of Revolution with Elastic Filler under Combined Quasi-Static and Dynamic Axisymmetric Loadings. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 1, pp. 45-57. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.1.05

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 1, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.1.05
УДК 539.3

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ КОМБИНИРОВАННЫХ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

В.Г. Баженов, Ю.А. Калинина, Е.В. Нагорных, Д.А. Самсонова

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 03 сентября 2023 г.
Одобрена: 28 февраля 2023 г.
Принята к публикации:
12 марта 2024 г.

Ключевые слова:

упругопластические оболочки вращения, упругий заполнитель, неосесимметричная потеря устойчивости, кручение, гипотезы Тимошенко, основание Винклера, численное моделирование, контактное взаимодействие, осесимметричное нагружение, численное моделирование.

АННОТАЦИЯ

Разработаны постановка и метод численного решения задач деформирования и потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим заполнителем при квазистатических и динамических нагружениях. Задача решается в двумерной (плоской или обобщенной осесимметричной с кручением) постановке. Определяющая система уравнений записывается в декартовой или цилиндрической системе координат. Моделирование процесса деформирования упругопластической оболочки осуществляется на основе гипотез теории оболочек типа Тимошенко с учетом геометрических нелинейностей. Кинематические соотношения записываются в скоростях и формулируются в метрике актуального состояния. Упругопластические свойства оболочки описываются теорией течения с нелинейным изотропным упрочнением. Моделирование заполнителя основано на гипотезах механики сплошной среды. Материал заполнителя полагается линейно упругим. Вариационные уравнения движения элементов конструкции (как оболочек, так и заполнителя) редуцируются из трехмерного уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред с учетом принятых гипотез теории оболочек либо плоского деформированного состояния или обобщенной осесимметричной деформации с кручением. Моделирование контактного взаимодействия оболочки и заполнителя основано на условии непроникания по нормали и проскальзывания по касательной. Для решения определяющей системы уравнений применяется конечно-разностный метод и явная схема интегрирования по времени типа «крест».

Апробация методики выполнена на задаче потери устойчивости стальной цилиндрической оболочки с упругим заполнителем при квазистатическом и динамическом обжатии внешним давлением, линейно возрастающим во времени. Результаты численного исследования сопоставляются с расчетами, выполненными с применением двух других подходов, разработанных авторами ранее. Первый подход основан на полномасштабном моделировании процесса деформирования оболочки и заполнителя в рамках механики сплошных сред. Во втором подходе применяется упрощенная постановка, в которой деформирование оболочки моделируется согласно гипотезам теории неполных оболочек типа Тимошенко с учетом геометрических нелинейностей, а заполнитель – гипотезе основания Винклера.

Разработанные подходы позволяют моделировать нелинейное докритическое деформирование оболочек вращения с упругим заполнителем, определять предельные (критические) нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы, исследовать процессы потери устойчивости по осесимметричным и неосесимметричным формам при динамических и квазистатических комбинированных нагружениях в условиях плоской и осесимметричной деформации.

© ПНИПУ

© **Баженов Валентин Георгиевич** – д.ф.-м.н., проф., гл. н.с. лаб. мат. моделирования и идентификации свойств материалов, e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, iD: 0000-0002-0077-7704.
Калинина Юлия Александровна – м.н.с. лаб. мат. моделирования и идентификации свойств материалов, e-mail: julia_22_00@mail.ru.
Нагорных Елена Владимировна – к.ф.-м. н., доц., с.н.с. лаб. мат. моделирования и идентификации свойств материалов, e-mail: pavlyonkova@mech.unn.ru, iD: 0000-0003-3330-5954.
Самсонова Дарья Анатольевна – м.н.с. лаб. мат. моделирования и идентификации свойств материалов, e-mail: ozornikova.dasha@yandex.ru, iD: 0000-0001-8413-875X.

Valentin G. Bazhenov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher, Laboratory of Mathematical Modeling and Material Property's Identification, e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, iD: 0000-0002-0077-7704.
Yulia A. Kalinina – Junior Researcher, Research Institute of Mechanics, e-mail: julia_22_00@mail.ru.
Elena V. Nagornykh – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Senior Researcher, e-mail: pavlyonkova@mech.unn.ru, iD: 0000-0003-3330-5954.
Daria A. Samsonova – Junior Researcher, e-mail: ozornikova.dasha@yandex.ru, iD: 0000-0001-8413.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

VARIATIONAL-DIFFERENCE SOLUTION OF DEFORMATION AND BUCKLING PROBLEMS OF ELASTOPLASTIC SHELLS OF REVOLUTION WITH ELASTIC FILLER UNDER COMBINED QUASI-STATIC AND DYNAMIC AXISYMMETRIC LOADINGS

V.G. Bazhenov, Yu.A. Kalinina, E.V. Nagornykh, D.A. Samsonova

Researcher Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 03 September 2023
Approved: 28 February 2023
Accepted for publication:
12 March 2024

Keywords:

elastoplastic shells of revolution, elastic filler, non-axisymmetric buckling, torsion, Timoshenko's hypotheses, Winkler foundation, numerical simulation, contact interaction, axisymmetric loading, numerical simulation.

ABSTRACT

The paper suggests a formulation and method for a numerical solution of deformation and buckling of elastoplastic shells of revolution with elastic filler under quasi-static and dynamic loadings. The problem is solved in a two-dimensional plane or generalized axisymmetric formulation with torsion. The governing system of equations is written in a Cartesian or cylindrical coordinate system. Modeling of deformation of an elastic-plastic shell is carried out based on the hypotheses of the theory of shells of the Timoshenko type, taking into account geometric nonlinearities. Kinematic relations are written in velocities and formulated in the metric of the current state. The elastoplastic properties of the shell are described by the flow theory with nonlinear isotropic hardening. Filler modeling is based on continuum mechanics hypotheses. The filler material is assumed to be linearly elastic. The variational equations of motion of structural elements (both shells and filler) are reduced from the three-dimensional equation of the balance of virtual powers of the work of continuum mechanics taking into account the accepted hypotheses of the theory of shells or a flat deformed state or generalized axisymmetric deformation with torsion. The modeling of the contact interaction between the shell and the filler is based on the condition of nonpenetration along the normal and slippage along the tangential. The finite-difference method and an explicit time integration scheme of the *cross* type are used to solve the defining system of equations.

Approbation of the technique was carried out on the problem of buckling of a steel cylindrical shell with an elastic filler under quasi-static and dynamic compression by an external pressure that linearly increases with time. The results of the numerical study are compared with calculations performed using two other approaches developed earlier by the authors. The first approach is based on full-scale modeling of the process of deformation of the shell and filler within the framework of continuum mechanics. In the second approach, a simplified formulation is used, in which the deformation of the shell is modeled according to the hypotheses of the theory of non-sloping shells of the Timoshenko type taking into account geometric nonlinearities, and the filler is modeled according to the Winkler foundation hypothesis.

The developed approaches make it possible to model the nonlinear subcritical deformation of shells of revolution with an elastic filler, to determine the ultimate (critical) loads in a wide range of loading rates taking into account geometric shape imperfections, to study buckling in axisymmetric and non-axisymmetric shapes under dynamic and quasi-static combined loadings in plane and axisymmetric deformations.

© PNRPU

Введение

Многие объекты авиа-, ракето-, машиностроения, химической промышленности и нефтяной отрасли содержат в качестве элементов составные осесимметричные оболочки с заполнителем. В некоторых режимах работы несущие слои таких элементов должны выдерживать не только статические, но и динамические нагружения. При превышении критических уровней нагрузок происходит потеря несущей способности конструкции из-за выпучивания оболочек. Для понижения массы оболочечных конструкций и повышения их устойчивости, а также для устранения неосесимметричных форм потери устойчивости применяется легкий (упругий) заполнитель [1; 2]. К настоящему времени весьма тщательно проработаны аналитические и численные методы описания процесса выпучивания упругих тонкостенных оболочек вращения. Исследование процессов деформирования и выпучивания упругопластических оболочек с заполнителем с переходом из осесимметричных форм в неосесимметричные возможно на основе известных методик, реализованных в вычислительных пакетах программ, путем численного моделирования только в трехмерной постановке. Время расчета такой задачи с применением вычислительных пакетов, в которых реализована явная схема интегрирования по времени, будет велико, поскольку шаг численного интегрирования определяется толщиной оболочки (т.е. малой величиной). В коммерческом программном обеспечении решение задач кручения осесимметричных тел возможно только в трехмерной постановке. Для длинных оболочек при больших углах вращения может происходить потеря точности из-за применения для учета вращения как жесткого целого производной Яуманна.

В работах [3–8] проведен анализ классической задачи о поперечной устойчивости тонкого стержня под действием осевой нагрузки при различных способах приложения нагрузки и закрепления концов. Показано, что

при динамическом нагружении продольной нагрузкой генерируется пакет неустойчивых форм. Верхний номер форм зависит от скорости приложения нагрузки. Скорость оказывает влияние на форму потери устойчивости, а не на критическую нагрузку. Реализуется не минимальная и не максимальная форма потери устойчивости, возможная для данной нагрузки, а та, номер которой примерно равен 2/3 от максимальной [4]. Образование высших форм потери устойчивости стержня и круговой цилиндрической оболочки при динамическом приложении нагрузки было обнаружено экспериментально при осевом динамическом сжатии стержня [4], обжатии трубы при имплозии и внешнем давлении [4; 9–11], потере устойчивости конической оболочки при внешнем давлении [12].

В [13] рассматриваются вопросы по определению напряженно-деформированного состояния и устойчивости тонкостенных оболочек с упругим заполнителем, приводится обзор исследований. Поведение упругого заполнителя моделируют в рамках механики сплошной среды с применением уравнений теории упругости [13–18] или применяют упрощенные модели, например, упругое основание с одним или двумя коэффициентами постели (основание Винклера или Пастернака) [13; 19–27].

В настоящей статье представлены постановка и методика численного решения нелинейных задач осесимметричного деформирования и потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим заполнителем при комбинированных осесимметричных нагружениях и кручении. Задачи формулируются в динамической постановке, что дает возможность описать большие докритические формоизменения упругопластических оболочек и переход оболочки к новой, изогнутой форме равновесия. Моделирование поведения оболочки основывается на гипотезах теории непологих оболочек типа Тимошенко с геометрическими нелинейностями и теории пластического течения с нелинейным изотропным упрочнением. Заполнитель полагается упругим массивным телом. Данный подход является развитием методик численного решения нелинейных задач осесимметричного деформирования и неосесимметричного выпучивания пустотелых упругопластических оболочек вращения при комбинированных осесимметричных нагружениях и кручении [28–30], контактного взаимодействия упругопластической оболочки вращения с упругим заполнителем, моделируемым основанием Винклера [31], обобщенных осесимметричных задач с кручением для массивных тел [32; 33], контактного взаимодействия упругопластических элементов конструкций в плоской или осесимметричной постановке [34–36]. Разработанные методики были реализованы в рамках вычислительного комплекса «Динамика-2».

1. Кинематические и физические соотношения для оболочки

Задача упругопластического деформирования и выпучивания оболочек вращения при комбинированных статических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением формулируется в двумерной (плоской или обобщенной осесимметричной) постановке исходя из гипотез теории оболочек типа Тимошенко [29–31]. Определяющие соотношения записываются в цилиндрической системе эйлеровых координат $Orz\beta$, Oz – ось вращения. На рис. 1 показаны местная (s,ξ,β) и общая (r,z,β) системы координат.

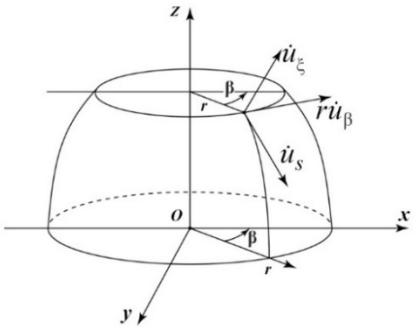


Рис. 1. Общая и местная системы координат

Fig. 1. General and local coordinate systems

Для каждого оболочечного элемента вводится местная лагранжева система координат $Os\xi$, связанная с общей соотношениями $ds = \psi_z dr - \psi_r dz$, $d\xi = \psi_r dr + \psi_z dz$, где s – длина дуги меридиана оболочечного элемента; ξ – координатная линия, нормальная к срединной поверхности; β – угловая координата; $\psi_z = r_{,s}$, $\psi_r = -z_{,s}$ – направляющие косинусы нормали к срединной поверхности.

Оболочечные элементы полагаются тонкими, изменением метрики по толщине пренебрегаем, деформации поперечного сдвига и изгиба малы по сравнению с деформациями срединной поверхности, кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния. Распределение компонент скоростей перемещений по толщине оболочки записывается в виде:

$$\tilde{\dot{u}}_s(s,\xi,\beta,t) = \dot{u}_s(s,\beta,t) + \xi\dot{\varphi}_s(s,\beta,t)$$

$$\tilde{\dot{u}}_\beta(s,\xi,\beta,t) = r\dot{u}_\beta(s,\beta,t) + \xi\dot{\varphi}_\beta(s,\beta,t), \quad (1)$$

здесь $\dot{u}_s(s,\beta,t)$ и $\dot{u}_\xi(s,\beta,t)$ – скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали, $\dot{u}_\beta(s,\beta,t)$ – скорость угла поворота по окружной координате β, $\dot{\varphi}_s(s,\beta,t)$ и $\dot{\varphi}_\beta(s,\beta,t)$ – угловые скорости поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения и в плоскости $O\xi\beta$.

Распределение компонент скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений) $\dot{e}_{ij}$ по толщине оболочки представляется в виде

суммы скоростей деформаций срединной поверхности $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и изгиба $\dot{\chi}_{ij}$. Компоненты скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\chi}_{ij}$ и скорость вращения элемента $\dot{\omega}_{s\beta}$ записываются в местном базисе $s\xi\beta$:

$$\dot{e}_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ij}+\xi\dot{\chi}_{ij},\ \dot{e}_{i\xi}=\dot{\varepsilon}_{i\xi}+\dot{\chi}_{i\xi}\ (i,j=s,\beta),\ \dot{e}_{\xi\xi}=\dot{\varepsilon}_{\xi\xi},$$

$$\dot{\varepsilon}_{ss}=\frac{\partial\dot{u}_s}{\partial s}+\frac{1}{R_s}\dot{u}_\xi,\ \ \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}=\frac{\partial\dot{u}_\beta}{\partial\beta}+\frac{\dot{u}_s}{r}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{1}{R_\beta}\dot{u}_\xi,$$

$$\dot{\varepsilon}_{s\beta}=\frac{1}{2}\left(r\frac{\partial\dot{u}_\beta}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{u}_s}{\partial\beta}-\dot{u}_\beta\frac{\partial r}{\partial s}\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{s\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{u}_\xi}{\partial s}-\frac{1}{R_s}\dot{u}_s\right),\ \ \dot{\varepsilon}_{\beta\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{u}_\xi}{\partial\beta}-\frac{1}{R_\beta}\dot{u}_\beta\right),$$

$$\dot{\chi}_{ss}=\frac{\partial\dot{\varphi}_s}{\partial s},\ \ \dot{\chi}_{\beta\beta}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\dot{\varphi}_\beta}{\partial\beta}+\dot{\varphi}_s\frac{\partial r}{\partial s}\right),$$

$$\dot{\chi}_{s\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{\varphi}_\beta}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{\varphi}_s}{\partial\beta}-\frac{\dot{\varphi}_\beta}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\right),$$

$$\dot{\chi}_{s\xi}=\frac{1}{2}\dot{\varphi}_s,\ \ \dot{\chi}_{\beta\xi}=\frac{1}{2}\dot{\varphi}_\beta,\dot{\omega}_{s\beta}=-\frac{1}{2}r\dot{u}_{\beta,s}. \qquad (2)$$

Выражения для компонент скоростей деформаций через компоненты скоростей перемещений в общем базисе $rz\beta$ получаются из (2) путем подстановки выражений $\dot{u}_s=\dot{u}_r\psi_z-\dot{u}_z\psi_r$, $\dot{u}_\xi=\dot{u}_r\psi_r+\dot{u}_z\psi_z$, они приведены в [29].

Компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}$ можно представить в виде суммы упругой $\dot{e}^e_{ij}$ и пластической $\dot{e}^p_{ij}$ составляющих. Предполагается, что упругие деформации малы, а пластические деформации могут быть большими. Компонента тензора напряжений Коши, нормальная к срединной поверхности оболочки, принимается равной нулю. Из условия плоского напряженного состояния и обобщенного закона Гука определяется компонента $\dot{e}_{\xi\xi}$:

$$\dot{e}_{ij}=\dot{e}^e_{ij}+\dot{e}^p_{ij},\ \dot{e}^p_{ii}=0\ (i,j=s,\beta,\xi). \qquad (3)$$

$$\dot{\sigma}_{\xi\xi}=0,\ \dot{e}^e_{\xi\xi}=\frac{\mu}{\mu-1}\left(\dot{e}^e_{ss}+\dot{e}^e_{\beta\beta}\right).$$

Компоненты тензоров скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и напряжений Коши σ_{ij} в местном базисе $s\xi\beta$ записываются в виде:

$$\dot{\sigma}_{ss}=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\dot{e}^e_{ss}+\mu\dot{e}^e_{\beta\beta}\right),\ \dot{\sigma}_{\beta\beta}=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\dot{e}^e_{\beta\beta}+\mu\dot{e}^e_{ss}\right),$$

$$\dot{\sigma}_{s\beta}=\frac{E}{1+\mu}\dot{e}^e_{s\beta},\ \dot{\sigma}_{s\xi}=\frac{E}{1+\mu}\dot{e}^e_{s\xi},\ \dot{\sigma}_{\xi\xi}=\dot{\sigma}_{\beta\xi}=0,$$

$$D_J\sigma_{ij}=\sigma_{jk}\dot{\omega}_{ki}+\sigma_{ik}\dot{\omega}_{kj},i,j,k=s,\beta,$$

$$\sigma_{ij}=\int_0^t D_J\sigma_{ij}dt,i,j=s,\beta,\sigma_{s\xi}=\int_0^t\dot{\sigma}_{s\xi}dt \qquad (4)$$

Здесь D_J – производная Яуманна, которая учитывает поворот элемента оболочки за счет сдвиговой деформации как квазижесткого целого относительно нормали к ее срединной поверхности при кручении. Местная сопутствующая система координат $Os\xi$ определяется формоизменениями оболочки без учета сдвиговых деформаций кручения, то есть она является лагранжевой только для осесимметричной деформации. Заметим, что деформации сдвига при кручении тонких оболочек ограничены из соображений устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Поэтому введение производной Яуманна для учета квазижесткого вращения при кручении вполне обоснованно при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени [29]. В итоге существенно упрощается запись основных уравнений обобщенной осесимметричной задачи с кручением, так как за базовую берется лагранжева система координат осесимметричной задачи.

Учет упругопластических свойств материала оболочки осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением:

$$\dot{e}^p_{ij}=\dot{\lambda}n_{ij},n_{ij}=\frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}},\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=\sigma^2_T(æ),\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij},$$

$$\sigma=(\sigma_{ss}+\sigma_{\beta\beta})/3,æ=\sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^t\sqrt{\dot{e}^p_{ij}\dot{e}^p_{ij}}\,dt, \qquad (5)$$

здесь $\sigma_T(æ)$ – радиус поверхности текучести; æ – параметр Одквиста, δ_{ij} – символ Кронекера; параметр $\dot{\lambda}$ определяется из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки.

Усилия N_{ij}, моменты M_{ij}, масса N_ρ и момент инерции M_ρ определяются по формулам:

$$N_{ij}(\beta)=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}(\beta)d\xi,\ M_{ij}(\beta)=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}(\beta)\xi d\xi,\ i,j=s,\beta,\xi$$

$$N_\rho(\beta)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho d\xi,\ M_\rho(\beta)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\xi^2d\xi. \qquad (6)$$

2. Кинематические и физические соотношения для заполнителя

Определяющая система уравнений двумерных задач в плоской или обобщенной осесимметричной (с кручением) постановке записывается в декартовой или цилиндрической системе эйлеровых координат r,β,z (Oz – ось вращения) в текущей лагранжевой постановке [32]. В силу осевой симметрии или плоской постановки все

искомые функции зависят от радиальной и осевой координат и не зависят от окружной.

Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие формоизменения. Компоненты тензоров скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений) $\dot{e}_{ij}$ и скоростей вращения $\dot{\omega}_{ij}$ при учете равенства $\dot{u}_\beta = r\dot{\theta}$ (θ – угол закручивания по окружной координате β) имеют вид:

$$\dot{e}_{rr} = \dot{u}_{r,r},\ \dot{e}_{\beta\beta} = \dot{u}_r r^{-1},\ \dot{e}_{zz} = \dot{u}_{z,z},$$

$$\dot{e}_{zr} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{z,r} + \dot{u}_{r,z}\right),\ \dot{e}_{r\beta} = \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,r},\ \dot{e}_{\beta z} = \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,z}, \qquad (7)$$

$$\dot{\omega}_{zr} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{z,r} - \dot{u}_{r,z}\right),\ \dot{\omega}_{r\beta} = -\frac{1}{2}\left(r\dot{\theta}_{,r} + 2\dot{\theta}\right),\ \dot{\omega}_{\beta z} = \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,z}.$$

Точка над переменной означает частную производную по времени, а символ после запятой – частную производную по соответствующей координате. В силу осевой симметрии в выражениях для компонент тензоров скоростей вращения $\dot{\omega}_{ij}$ (последние три равенства в (7) полный угол поворота относительно оси Oz не учитывается.

Упругопластические свойства материалов описываются теорией течения с нелинейным изотропным упрочнением. Связь между компонентами девиатора скоростей напряжений $\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{P}\delta_{ij}$ и упругими составляющими компонент девиатора скоростей деформаций $\left(\dot{e}^e_{ij}\right)' = \dot{e}_{ij} - \dot{e}\delta_{ij}/3 - \dot{e}^p_{ij}$ осуществляется на основе обобщенного закона Гука в метрике текущего состояния:

$$D_J\sigma'_{ij} = 2G\left(\dot{e}^e_{ij}\right)', \quad D_J\sigma'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\omega}_{ik}\sigma'_{kj} - \dot{\omega}_{jk}\sigma'_{ik},$$

$$\dot{P} = -K\dot{e}^e, \quad \dot{P} = -\dot{\sigma}_{ii}/3, \quad \dot{e} = \dot{e}^e_{ii}, \dot{e}^P_{ii} = 0, \qquad (8)$$

где D_J – производная Яуманна, описывающая поворот частицы среды как жесткого целого; K, G – модули объемного сжатия и сдвига; P – давление; δ_{ij} – символ Кронекера. Скорости пластических деформаций определяются ассоциированным законом течения:

$$\dot{e}^P_{ij} = \dot{\lambda}\sigma'_{ij},\ \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_i^2\left(æ\right),\ \sigma_i = \sigma_i\left(æ\right),$$

$$æ = \sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^t \sqrt{\dot{e}^P_{ij}\dot{e}^P_{ij}}\,dt, \qquad (9)$$

где $\sigma_i = \sigma_i\left(æ\right)$ – зависимость интенсивности напряжений от параметра Одквиста $æ$ при монотонном нагружении (истинная диаграмма деформирования материала).

3. Уравнения движения оболочки с заполнителем с учетом контактного взаимодействия

Вариационные уравнения движения элементов конструкции (как оболочек, так и заполнителя) редуцируются из трехмерного уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред:

$$\sum_{k=1}^{K}\left(\iiint_{V_k}\sigma_{ij}\delta\dot{e}_{ij}dV + \iiint_{V_k}\rho\ddot{u}_i\delta\dot{u}_i dV - \iint_{S_{pk}}p_i\delta\dot{u}_i ds - \iint_{S_{qk}}q_i\delta\dot{u}_i ds\right) = 0. \qquad (10)$$

Здесь V_k – объем, занимаемый k-м элементом конструкции (исследуемая область); K – количество элементов конструкций; S_{pk} – зона действия внешнего давления; S_{qk} – поверхность контакта; $\dot{u}_i$, $\ddot{u}_i$ – компоненты векторов скорости перемещения и ускорения в общей системе координат; σ_{ij} и $\dot{e}_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений Коши и скорости деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений); ρ – плотность; q_i – контактное давление; p_i – распределенная нагрузка; $\delta\dot{e}_{ij}$, $\delta\dot{u}_i$ – вариации $\dot{e}_{ij}$, $\dot{u}_i$ (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями $\delta\dot{u}_i = 0$); $i, j = r, \beta, z$, точка над символом означает частную производную по времени t; по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Вариационные уравнения движения оболочки выводятся из общего уравнения динамики (10) с учетом принятых гипотез теории оболочек (1)–(6):

$$\int_0^L\Big\{\left(N_{s\xi}\psi_r + N_{ss}\psi_z\right)\delta\dot{u}_{r,s} + \left(N_{s\xi}\psi_z - N_{ss}\psi_r\right)\delta\dot{u}_{z,s} + vrN_{s\beta}\delta\dot{u}_{\beta,s} +$$
$$+M_{ss}\delta\dot{u}_{\varphi,s} + \left[vr^{-1}N_{\beta\beta} + N_\rho\left(\ddot{u}_r - vr\dot{u}_\beta^2\right) - p_r - q_r\right]\delta\dot{u}_r +$$
$$+\left(N_\rho\ddot{u}_z - p_z - q_z\right)\delta\dot{u}_z + v\left(r^2N_\rho\ddot{u}_\beta - \rho_\beta - q_\beta\right)\delta\dot{u}_\beta +$$
$$+\left(N_{s\xi} + vr^{-1}M_{\beta\beta}\psi_z + M_\rho\ddot{u}_\varphi\right)\delta\dot{u}_\varphi +$$
$$+v\left(N_{\beta\xi} - M_{s\beta}\psi_z + M_\rho\ddot{u}_\beta\right)\delta\dot{u}_\beta\Big\}rds -$$
$$-\left[r\left(P_r\delta\dot{u}_r + P_z\delta\dot{u}_z + vP_\beta\delta\dot{u}_\beta + T_s\delta\dot{u}_\varphi\right)\right]_{s=0,L} = 0. \qquad (11)$$

Здесь v – параметр симметрии ($v = 0$ – плоская деформация, $v = 1$ – обобщенная осесимметричная деформация с кручением); $\dot{u}_s\left(s,t\right)$, $\dot{u}_\xi\left(s,t\right)$ – скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали; $\dot{u}_\varphi\left(s,t\right)$ – угловая скорость поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения; $\dot{u}_\beta\left(s,t\right)$ – угловая скорость поворота относительно оси вращения; q_i – контактное давление; p_i – распределенная нагрузка; N_{ij}, M_{ij} – внутренние усилия и мо-

менты; M_ρ, J_ρ – масса и момент инерции; P_i и T_s – внешние усилия и изгибающий момент.

Вариационные уравнения движения сплошной среды (заполнителя) выводятся из общего уравнения динамики (11) с учетом соотношений Коши и условий плоского деформированного состояния или обобщенной осесимметричной деформации с кручением (7)–(9):

$$\iint\limits_\Omega \left\{ \sigma_{rr}\frac{\partial\delta\dot v_r}{\partial r}+\sigma_{rz}\left(\frac{\partial\delta\dot v_r}{\partial z}+\frac{\partial\delta\dot v_z}{\partial r}\right)-\nu\left(\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\beta\beta}}{r}\delta\dot v_r+\frac{\sigma_{rz}}{r}\delta\dot v_z\right)+ \right.$$

$$\left. +\sigma_{zz}\frac{\partial\delta\dot v_z}{\partial z}+\nu\left(\sigma_{r\beta}\frac{\partial\delta\dot\theta}{\partial r}+\sigma_{\beta z}\frac{\partial\delta\dot\theta}{\partial z}\right)+\rho\left(w_r\delta\dot v_r+\nu w_\beta r^2\delta\dot\theta+w_z\delta\dot v_z\right)\right\}d\Omega-$$

$$-\int\limits_{S_p}\left(p_r\delta\dot v_r+\nu p_\beta r^2\delta\dot\theta+p_z\delta\dot v_z\right)dS-$$

$$-\int\limits_{S_q}\left(q_r\delta\dot v_r+\nu q_\beta r^2\delta\dot\theta+q_z\delta\dot v_z\right)dS=0. \qquad (12)$$

Здесь Ω – площадь, занимаемая меридиональным сечением заполнителя; S_p – зона действия внешнего давления; S_q – зона контактного взаимодействия; $\dot u_i$, $\ddot u_i$ – компоненты векторов скорости перемещения и ускорения в общей системе координат; σ_{ij} и $\dot e_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений Коши и скорости деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений); ρ – плотность; q_i – контактное давление; p_i – распределенная нагрузка; $\delta\dot e_{ij}$, $\delta\dot u_i$ – вариации $\dot e_{ij}$, $\dot u_i$ (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями $\delta\dot u_i=0$); ν – параметр симметрии ($\nu=0$ – плоская деформация, $\nu=1$ – обобщенная осесимметричная деформация с кручением), функции $\dot v_\alpha=r^\nu\dot u_\alpha\ (\alpha=r,z)$, и $\dot\theta=\nu r^{-1}\dot u_\beta$ введены в задаче с осевой симметрией для устранения особенности численного решения на оси вращения.

Определяющая система уравнений (1)–(12) дополняется начальными и кинематическими граничными условиями. Для ее решения применяется вариационно-разностный метод и явная схема интегрирования по времени типа «крест».

Скорости перемещений и перемещения узлов разностной сетки заполнителя и срединной поверхности оболочки определяются по рекуррентным соотношениям:

$$\dot u_\alpha^{k+1/2}=\dot u_\alpha^{k-1/2}+\left(\Phi_\alpha^k+q_\alpha^k+p_\alpha^k\right)\frac{\Delta t^{k+1/2}}{\Phi_\zeta^k},$$

$$u_\alpha^{k+1}=u_\alpha^k+\dot u_\alpha^{k+1/2}\Delta t^{k+1}, \qquad (13)$$

где для оболочки $\alpha=r,z,\varphi,\beta$, для массивного тела $\alpha=r,z,\beta$, Φ_α, Φ_ζ – обобщенные узловые силы и масса или момент инерции.

Взаимодействие элементов конструкции (оболочки и заполнителя) обеспечивается дополнительными кинематическими и статическими условиями на контактных поверхностях. Полагается, что у массивных тел контактными границами являются части контура, а у оболочек – части срединной поверхности. Компоненты контактного давления $q_\alpha(\alpha=r,z,\beta)$, положение и конфигурация контактных поверхностей в общем случае заранее неизвестны и определяются в ходе решения задачи.

Моделирование контактного взаимодействия оболочки и заполнителя основано на условии непроникания по нормали и проскальзывания по касательной [34; 35; 37]. На участке контакта вводится местный базис (s,ξ,β). Здесь s – направление касательной, ξ – нормали к поверхности, β – окружная координата (совпадает с окружной координатой общего базиса в цилиндрической системе координат). Усилие по нормали определяется из условия непроникания, а касательные усилия полагаются равными нулю:

$$\begin{cases}\dot u'_\xi=\dot u''_\xi\\ q'_\xi=-q''_\xi\end{cases}\quad q_\xi=q'_\xi=\begin{cases}0, q_\xi\ge 0\\ q_\xi, q_\xi<0\end{cases}$$

$$\dot u'_\alpha\ne\dot u''_\alpha,\ q'_\alpha=q''_\alpha=0,\alpha=s,\beta. \qquad (14)$$

Функции со штрихом относятся к контактирующей поверхности оболочки, а с двумя штрихами – заполнителя. Условия непроникания (14) выполняются только в активной фазе контактного взаимодействия. При нарушении контакта они заменяются условиями на свободной поверхности.

Для вычисления контактных давлений вариационное уравнение движения контактных границ записывается в местном базисе (s,ξ,β). Сначала по известному на момент времени $t=t^k$ распределению параметров напряженно-деформированного состояния для узлов разностной сетки обеих контактных границ находятся скорости перемещений $\dot u_\xi^{k+1/2}$ и перемещения u_ξ^{k+1} по нормали по рекуррентным соотношениям (13) $(\alpha=\xi)$ без учета контактного взаимодействия $(q_\xi=0)$. По перехлесту сеток определяется зона контакта. Если перехлест сеток для узлов отсутствует, то полученное решение является для них истинным. В противном случае определяется контактное давление, исходя из условий (13) и (14):

$$q_\xi^{k+1}=\frac{\frac{\left(\dot u_\xi''\right)^{k+1/2}-\left(\dot u_\xi'\right)^{k+1/2}}{\Delta t^{k+1/2}}+\frac{\left(\Phi_\xi''\right)^k}{\left(\Phi_M''\right)^k}-\frac{\left(\Phi_\xi'\right)^k}{\left(\Phi_M'\right)^k}}{\left[\frac{1}{\Phi_M'}+\frac{1}{\Phi_M''}\right]^k}. \qquad (15)$$

Нормальные контактные давления, вычисленные в местном базисе по формуле (15), перепроецируются из местного базиса в общий. Затем осуществляется расчет

скоростей перемещений $\dot{u}_\alpha^{k+1/2}$ и перемещений u_α^{k+1} оболочки $(\alpha = r, z, \varphi, \beta)$ и заполнителя $(\alpha = r, z, \beta)$ по стандартной вычислительной схеме (13) с учетом контактных давлений.

Разработанный подход позволяет моделировать нелинейное докритическое деформирование оболочек вращения с упругим заполнителем, определять предельные нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы, исследовать процессы потери устойчивости по осесимметричным и неосесимметричным формам при динамических и квазистатических комбинированных нагружениях в условиях плоской и осесимметричной деформации.

4. Результаты численного моделирования

С применением разработанной методики исследована задача деформирования и потери устойчивости стальных цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при равномерном внешнем давлении. Толщина оболочки $h_0 = 1$ мм, радиус $R_0 = 14,5$ мм. Материал оболочки – сталь Х18Н10Т с механическими характеристиками: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м^3, диаграмма деформирования материала приведена в [2].

Результаты численного исследования сопоставлялись с расчетами, выполненными с применением двух других численных подходов.

Первый подход основан на полномасштабном моделировании процесса деформирования и оболочки и заполнителя в рамках механики сплошных сред [32; 34; 35]. Для описания формоизменения элемента сплошной среды кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния (7). Упругопластические свойства материала оболочки описываются теорией течения с нелинейным изотропным упрочнением (8), (9). Материал заполнителя полагается линейно упругим. Вариационные уравнения движения оболочки и заполнителя (12) следуют из уравнения баланса виртуальных мощностей (12). Контактные усилия определяются в ходе решения задачи исходя из условий непроникания по нормали и свободного проскальзывания вдоль касательной. Условия непроникания выполняются только в активной фазе контактного взаимодействия, при нарушении контакта они заменяются условиями на свободной поверхности (14), (15).

Во втором подходе применяется упрощенная постановка, в которой деформирование оболочки моделируется согласно гипотезам теории непологих оболочек типа Тимошенко с учетом геометрических нелинейностей [28–31], а заполнитель – гипотезе основания Винклера [31; 37]. Кинематические соотношения записываются в скоростях и формулируются в метрике актуального состояния (1), (2). Физические соотношения материала оболочки учитываются теорией течения с нелинейным изотропным упрочнением (3), (4). Уравнения динамики оболочки (11) выводятся из уравнения баланса виртуальных мощностей работы (10). Контактное взаимодействие оболочки и деформируемого заполнителя моделируется из условий непроникания по нормали и свободного проскальзывания вдоль касательной (14). Полагается, что контактное давление в области взаимодействия оболочки с заполнителем пропорционально прогибу оболочки с коэффициентом постели γ, т.е. принимается гипотеза Винклера [31; 37].

Представленную в данной статье методику (1)–(15) для краткости изложения будем называть третьим подходом.

Полагалось, что оболочка и заполнитель находятся в условиях плоского деформированного состояния. Расчетная область представляет собой поперечное сечение оболочки с заполнителем. В случае моделирования заполнителя основанием Винклера (второй подход) задавались значения коэффициента постели: $\gamma = 3000$, 5000, 7000 и 10 000 МПа/м. Для расчетов по второму и третьему подходу (заполнитель – сплошная среда) для каждого коэффициента постели задавались: плотность $\rho = 40$ кг/м^3, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, три варианта начальной толщины заполнителя $H_0 = 3$, 8 и 13 мм. Для каждой толщины заполнителя вычислялся модуль упругости согласно формуле $\gamma = E / \left(H_0 \left(1 - 2\nu^2 \right) \right)$ [19].

Внешнее давление монотонно возрастает по линейному закону от времени: $p = p_0 t$. В расчетах задавалось три варианта параметра скорости нагружения p_0: 50; 5000 и 50 000 МПа/с. Во втором и третьем подходах на внутренней поверхности заполнителя задавался запрет перемещений по нормали. Начальные несовершенства оболочки (отклонение поперечного сечения от круглой формы) моделировались начальной погибью срединной поверхности с относительной амплитудой $A = 1 \cdot 10^{-5}$: $\Delta R_0 = A h_0 \cos n\beta, n = 2, 3, \ldots, 0 \le \beta \le 2\pi$.

На рис. 2 приведены расчетные зависимости относительного среднего прогиба $\hat{w}$ от внешнего давления p. Относительный средний прогиб оболочки определялся по формуле:

$$w = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \left(u_\xi \right)_i, \quad \hat{w} = -\frac{w}{h_0},$$

где w – средний прогиб, L – количество узлов разностной сетки в окружном направлении, где $\left(u_\xi \right)_i$ – прогиб (перемещение по нормали) *i*-го узла расчетной сетки, покрывающей срединную линию оболочки.

В качестве критерия потери устойчивости оболочки примем резкий рост относительного среднего прогиба $\hat{w}$. Первый докритический безмоментный этап деформирования оболочки характеризуется линейным ростом относительного среднего прогиба $\hat{w}$. Второй закритический

этап деформирования проявляется резким ростом относительного среднего прогиба $\hat{w}$, так что графики зависимостей среднего прогиба $\hat{w}$ от давления p близки к двухзвенным ломаным (см. рис. 2). Величину внешнего давления p^*, при которой происходит излом кривых, будем называть предельным давлением. Критическое давление, которое определяется как собственное значение, и предельное давление могут различаться при динамическом нагружении.

В первом [31] и третьем подходах расхождение величин предельного давления p^* для каждого фиксированного значения коэффициента постели γ и различных начальных толщинах заполнителя $H_0/h_0 = \overline{3,13}$ не превышает 1 %, поэтому для расчетов с этими подходами все графики приводятся для расчетов с $H_0 = 8$ мм.

Из рис. (2, *a*) видно, что для пустотелой оболочки при динамическом нагружении величина предельного давления p^* увеличилась на 12 % по сравнению с квазистатическим. С увеличением жесткости заполнителя γ уменьшается влияние скорости нагружения p_0 на предельное давление p^* (см. рис. 2, *b*–*c*). На рис. 3 приведены эти же зависимости при квазистатическом (см. рис. 2, *a*) и динамическом (p_0 = 5000 МПа/с) (см. рис. 2, *b*) нагружениях. При квазистатическом нагружении жесткость заполнителя существенно влияет на предельное давление p^*. Разброс значений p^* составляет около 20 % (см. рис. 3, *a*). При динамическом нагружении предельные давления p^* практически совпадают (см. рис. 3, *b*). Увеличение жесткости заполнителя, так же, как и увеличение скорости нагружения приводят к увеличению предельного давления p^*, поскольку и заполнитель, и силы инерции оказывают поддерживающий эффект.

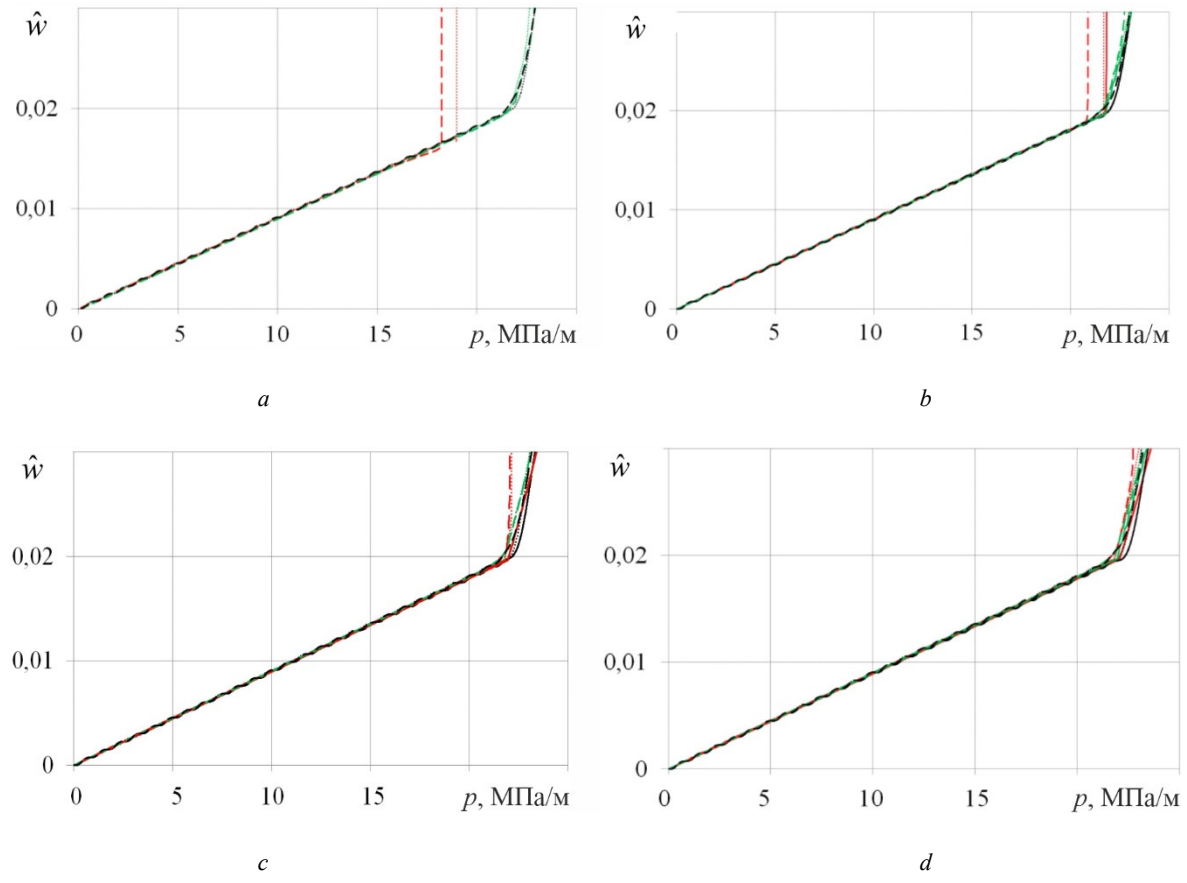
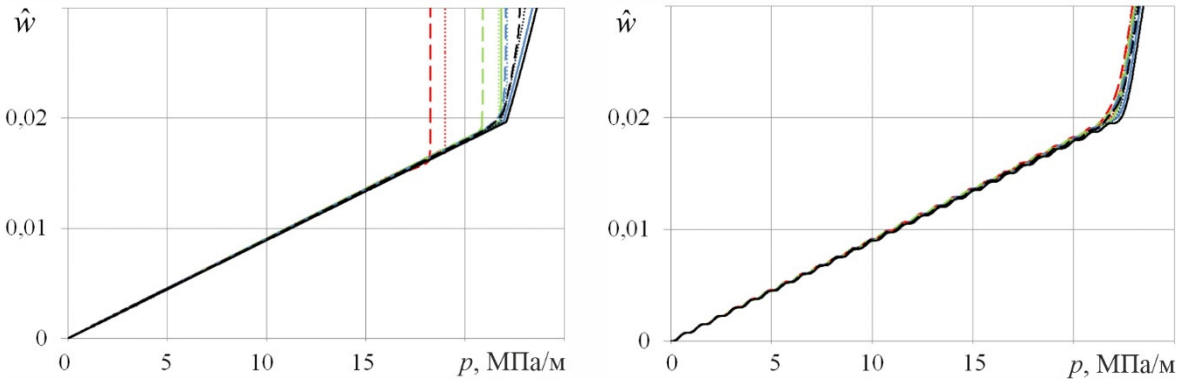


Рис. 2. Зависимости относительного среднего прогиба от давления: коэффициент постели: γ = 0 (*a*), 3000 (*b*), 7000 (*c*) и 10 000 (*d*) МПа/м; первый подход – пунктирные линии, второй подход – точки, третий подход – сплошные линии; параметр скорости нагружения p_0: 50 (красные кривые); 5000 (зеленые кривые) и 50 000 (черные кривые) МПа/с

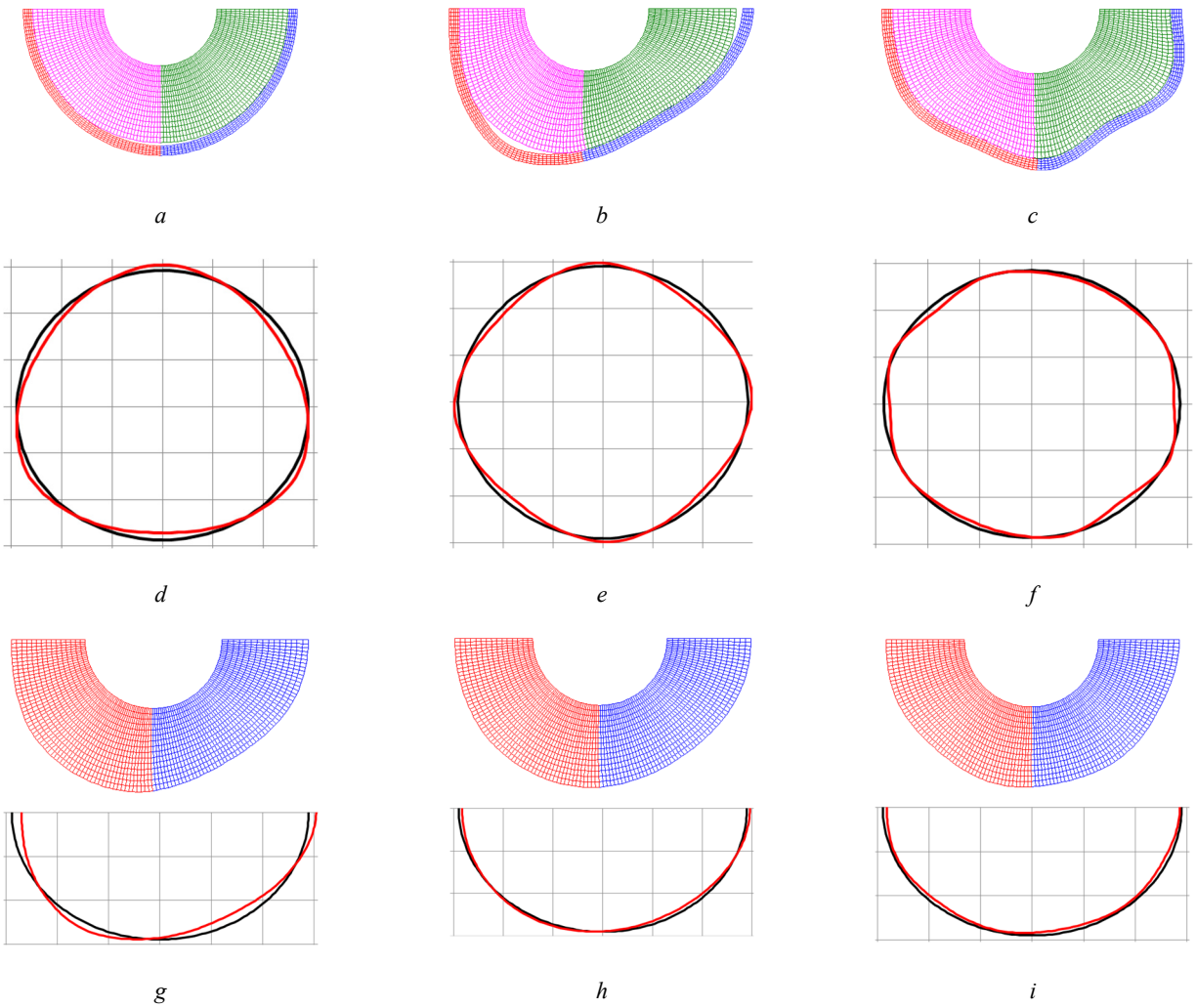
Fig. 2. Dependence of the relative average deflection on pressure: bed coefficient: γ = 0 (*a*), 3000 (*b*), 7000 (*c*) and 10 000 (*d*); first approach is shown with dotted lines, second approach is shown in dots, third approach is shown in solid lines; loading speed parameter p_0: 50 (red curves); 5,000 (green curves) and 50,000 (black curves) MPa/s



a *b*

Рис. 3. Зависимости относительного среднего прогиба от давления: коэффициент постели: γ = 0 (красные), 3000 (зеленые), 7000 (синие) и 10 000 (черные) МПа/м; первый подход – пунктирные линии, второй подход – точки, третий подход – сплошные линии; параметр скорости нагружения p_0: 50 (*a*) и 50 000 (*b*) МПа/с

Fig. 3. Dependence of the relative average deflection on pressure: bed coefficient: γ = 0 (red), 3000 (green), 7000 (blue) and 10,000 (black) MPa/m; first approach is shown in dotted lines, second approach is shown in dots, third approach is shown in solid lines; loading rate parameter p_0: 50 (*a*) and 50,000 (*b*) MPa/s



a *b* *c*

d *e* *f*

g *h* *i*

Рис. 4. Формы потери устойчивости оболочек с заполнителем (γ = 3000 МПа/м), первый подход – *a*–*c*, второй подход – *d*–*f*, третий подход – *g*–*i*; параметр скорости нагружения p_0: 50 (*a*, *d*, *g*), 5000 (*b*, *e*, *h*) и 50000 (*c*, *f*, *j*) МПа/с

Fig. 4. Buckling modes of shells with filler (γ = 3000 MPa/m), first approach (*a*–*c*), second approach (*d*–*f*), third approach (*g*–*i*); loading rate parameter p_0: 50 (*a*, *d*, *g*), 5,000 (*b*, *e*, *h*) and 50,000 (*c*, *f*, *j*) MPa/s

С увеличением скорости нагружения и жесткости упругого заполнителя наблюдается рост номеров преобладающих форм потери устойчивости, имеющих наибольшую скорость роста. Пустотелые оболочки в проведенных расчетах теряли устойчивость по второй форме. На рис. 4 приведены формы потери устойчивости оболочки, полученные в расчетах по трем подходам, коэффициент постели $\gamma = 3000$. Для первого подхода приведены расчетные сетки оболочки и заполнителя после потери устойчивости (*a*–*c*). Для второго подхода красными линиями приведены срединные линии оболочек после потери устойчивости, черными – ее начальная форма (*d*–*f*). Для третьего подхода приведена расчетная сетка заполнителя и срединные линии оболочек (*g*–*i*). Потеря устойчивости оболочки с заполнителем (коэффициент постели $\gamma = 3000$) в расчетах с параметром скорости нагружения $p_0 = 50$ МПа/с происходит по второй или третьей форме (*a*, *d*, *g*), $p_0 = 5000$ МПа/с – по третьей (*b*, *e*, *h*) и $p_0 = 5000$ МПа/с (*c*, *f*, *j*) – по смешанной форме более высокого порядка.

Заключение

Представлен подход к описанию контактного взаимодействия упругопластических оболочек вращения с упругим заполнителем при статических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением. Приводится сопоставление результатов численного решения задачи о нагружении равномерным внешним давлением упругопластических пустотелых и заполненных упругой средой оболочек ($R/h = 14{,}5$) с расчетами по двум другим подходам, разработанным авторами ранее. Результаты расчетов по всем трем подходам хорошо согласуются друг с другом как по закритическому формообразованию, так и по величине предельного давления.

Увеличение жесткости заполнителя, так же, как и увеличение скорости нагружения, приводят к увеличению предельного давления p^*, поскольку и заполнитель, и силы инерции оказывают поддерживающий эффект. При этом наблюдается рост номеров преобладающих форм потери устойчивости, имеющих наибольшую скорость роста.

Преимуществом второго и третьего подхода является значительное сокращение времени расчета по сравнению с первым подходом. Среднее время расчета одного варианта при квазистатическом нагружении на компьютере с процессором 4,39 ГГц с применением первого подхода составляет около 18 ч, второго подхода – около 10 мин, третьего – около 8 ч. Данные подходы позволяют исследовать предельные нагрузки и формы потери устойчивости оболочек, а также закритическое поведение оболочек с учетом начальных геометрических несовершенств, контактного взаимодействия и отрыва от заполнителя. Было показано, что применение модели основания Винклера в задачах контактного взаимодействия осесимметричных упругопластических оболочек с упругим заполнителем при внешнем давлении как при низких, так и при локальных формах потери устойчивости является обоснованным [31]. Однако условие применимости второго подхода необходимо оценивать для каждой конкретной задачи.

Библиографический список

1. Исследование упругопластического деформирования цилиндрических оболочек при осевом ударном нагружении / А.И. Абакумов, Г.А. Квасков, С.А. Новиков, В.А. Синицин, А.А. Учаев // ПМТФ. – 1988. – № 3. – С. 150–153.

2. Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении / В.Г. Баженов, М.С. Баранова, А.И. Кибец, В.К. Ломунов, Е.В. Павленкова // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. – Т. 152, № 4. – С. 86–105.

3. Эйлер, Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле / Л. Эйлер. – М., Л.: ГИТТЛ, 1934. – 600 с.

4. Лаврентьев, М.А. Динамические формы потери устойчивости упругих систем / М.А. Лаврентьев, А.Ю. Ишлинский // ДАН. – 1949. – Т. 64, № 6. – С. 776–782.

5. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

6. Беляев, А.К. Динамический подход к задаче Ишлинского – Лаврентьева / А.К. Беляев, Д.Н. Ильин, Н.Ф. Морозов // Известия РАН. МТТ. – 2013. – № 5. – С. 28–33.

7. Задача Ишлинского – Лаврентьева на начальном этапе движения / Н.Ф. Морозов, А.К. Беляев, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик // ДАН. – 2015. – Т. 463, № 5. – С. 543–546.

8. Морозов, Н.Ф. Устойчивость стержня при длительном осевом сжатии / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик // Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – Т. 77, № 1. – С. 40–48.

9. Dynamic implosion of underwater cylindrical shells: Experiments and Computations / C. Farhat, K.G. Wangc, A. Main, S. Kyriakides, L.-H. Lee, K. Ravi-Chandar, T. Belytschko // International Journal of Solids and Structures. 2013. – Vol. 50. – P. 2943–2961.

10. Giezen, J.J. Plastic buckling of cylindrical shells under biaxial loading / J.J. Giezen, C.D. Babcock, J. Singer // Experimental Mechanics. – 1990. – Vol. 33. – P. 337–343. DOI: 10.1007/BF02325990

11. Carvelli, V. Buckling strength of GFRP under-water vehicles / V. Carvelli, N. Panzeri, C. Poggi // Composites: Part B. – 2001. – Vol. 32. – P. 89–101.

12. Ghazijahani, T.G. Experiments on conical shell reducers under uniform external pressure / T.G. Ghazijahani, H. Showkati // Journal of Constructional Steel Research. – 2011. – Vol. 67. – P. 1506–1515. DOI: 10.1016/j.jcsr.2011.03.024

13. Ильгамов, М.А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем / М.А. Ильгамов, В.А. Иванов, Б.В. Гулин. – М.: Наука, 1977. – 331 с.

14. Тарлаковский, Д.В. Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим заполнителем / Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, № 1. – С. 141–151.

15. О влиянии заполнителя на критические параметры импульса давления при динамической потере устойчивости

цилиндрической оболочки / В.В. Бендюков, В.В. Дерюшев, М.М. Лурье, П.Н. Овчаров // Научный вестник МГТУ ГА. – 2005. – № 84 (2). – С. 131–137.

16. Stability improvement of thin isotropic cylindrical shells with partially filled soft elastic core subjected to external pressure / A.P. Dash, R. Velmurugan, M.S.R. Prasad, R.S. Sikarwar // Thin–Walled Structures, B. – 2016. – Vol. 98. – P. 301–311. DOI: 10.1016/j.tws.2015.09.028.

17. Karam, G.N. Elastic buckling of cylindrical shells with elastic cores. I / G.N. Karam, L.J. Gibson // Analysis Int J Solids Structures. 1995. – Vol. 32. – P. 1259–1263.

18. Ye, L. Buckling of a thin-walled cylindrical shell with foam core under axial compression / L. Ye, G. Lu, L.S. Ong // Thin–Walled Structures. – Vol. 49, no. 1. – P. 106–111. DOI: 10.1016/j.tws.2010.08.011

19. Пастернак, П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П.Л. Пастернак. – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 56 с.

20. Иванов, В.А. Определение реакции заполнителя в задачах взаимодействия его с оболочкой / В.А. Иванов // Вестник Казанского технологического университета. – 2011. – № 8. – С. 224–228.

21. Луговой, П.З. Влияние упругого основания на дисперсию гармонических волн в продольно подкрепленных цилиндрических оболочках / П.З. Луговой, Н.Я. Прокопенко // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 116–124.

22. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов, В.П. Георгиевский, А.Я. Недбай, В.А. Андрюшин. – М.: Изд-во Физматлит, 2013. – 343 с.

23. Nonlinear dynamic stability of the orthotropic functionally graded cylindrical shell surrounded by Winkler – Pasternak elastic foundation subjected to a linearly increasing load / Kang Gao, Wei Gao, Di Wu, Chongmin Song // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – No. 415. – P. 147–168. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.11.038

24. Nobili, A. A cracked infinite Kirchhoff plate supported by a two-parameter elastic foundation / A. Nobili, E. Radi, N. Lanzoni // J. Eur. Ceram. Soc. – 2014. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2013.12.029

25. Buckling patterns of complete spherical shells filled with an elastic medium under external pressure / M. Sato, M.A. Wadee, K. Iiboshi, T. Sekizawa, H. Shima // International Journal of Mechanical Sciences. – 2012. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2012.02.001

26. Power law of critical buckling in structural members supported by a Winkler foundation / M. Sato, S. Harasawa, Y. Konishi, T. Maruyama, S.J. Park // Journal of Mechanics. – 2017. – Vol. 33, no. 3. – P. 369–374. DOI: 10.1017/jmech.2016.112

27. Shaterzadeh, A.R. Non-linear analysis of asymmetrical eccentrically stiffened FGM cylindrical shells with non-linear elastic foundation / A.R. Shaterzadeh, K. Foroutan // Journal of Solid Mechanics. – 2017. – Vol. 9, no. 4. – P. 849–864.

28. Теоретический и экспериментальный анализ больших деформаций и предельных состояний упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях / А.А. Артемьева, В.Г. Баженов, Д.А. Казаков, А.И. Кибец, Е.В. Нагорных // ПММ. – 2015. – Т. 79, вып. 4. – С. 558–570.

29. Моделирование неосесимметричного выпучивания упругопластических оболочек вращения при комбинированных осесимметричных нагружениях / А.А. Артемьева, В.Г. Баженов, Е.В. Нагорных, Д.А. Казаков, Т.В. Кузмичева // ПММ. – 2017. – Т. 81, вып. 5. – С. 610–622.

30. Баженов, В.Г. Исследование упругопластического выпучивания оболочек вращения при ударном нагружении / В.Г. Баженов, В.К. Ломунов // Прикл. пробл. прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Горьк. ун-т. – 1975. – Вып. 2. – С. 44–50.

31. Баженов, В.Г. Исследование применимости модели основания Винклера для описания контактного взаимодействия упругопластических оболочек с заполнителем при внешнем давлении / В.Г. Баженов, Е.В. Нагорных, Д.А. Самсонова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 36–48. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.04

32. Баженов, В.Г. Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения–кручения осесимметричных тел при больших деформациях / В.Г. Баженов, Д.В. Жегалов, Е.В. Павленкова // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 57–66.

33. Экспериментальное и теоретическое исследование больших деформаций цилиндрических образцов из стали 09Г2С с концентраторами напряжений при нагружении растяжением–кручением до разрушения / В.Г. Баженов, Д.А. Казаков, Е.В. Нагорных, Д.Л. Осетров, А.А. Рябов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 69–81. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.06

34. Зефиров, С.В. Импульсное деформирование и контактное взаимодействие упругопластических элементов осесимметричных конструкций / С.В. Зефиров // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. – 1984. – С. 152–153.

35. Баженов, В.Г. Численное моделирование задач нестационарного контактного взаимодействия деформируемых конструкций / В.Г. Баженов, С.В. Зефиров, И.Н. Цветкова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: межвуз. сб. – М.: Товарищество научных изданий КМК, 1995. – Вып. 52. – С. 154–160.

36. Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами / В.Г. Баженов, С.В. Зефиров, А.В. Кочетков, С.В. Крылов, В.Р. Фельдгун // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12 (6). – С. 67–72.

37. Постановка и численное решение задачи потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим заполнителем при комбинированных осесимметричных нагружениях с кручением / В.Г. Баженов, Д.А. Казаков, А.И. Кибец, Е.В. Нагорных, Д.А. Самсонова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 95–106. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.10

References

1. Abakumov A.I, Kvaskov G.A., Novikov S.A., Sinitsin V.A., Uchayev A.A. Issledovaniye uprugoplasticheskogo deformirovaniya tsilindricheskikh obolochek pri osevom udarnom nagruzhenii [Investigation of elastoplastic deformation of cylindrical shells under axial shock loading]. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya fizika*, 1988, No 3, p. 150-153.

2. Bazhenov V.G., Baranova M.S., Kibets A.I., Lomunov V.K., Pavlenkova E.V. Vypuchivaniye uprugoplasticheskikh tsilindricheskikh i konicheskikh obolochek pri osevom udarnom nagruzhenii [Buckling of Elastic-Plastic Cylindrical and Conical Shells of Revolution under Axial Impact Loading]. *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko–matematicheskiye nauki,* 2010, V. 152, № 4, pp. 86-105.

3. Euler L. Metod nakhozhdeniya krivykh liniy, obladayushchikh svoystvami maksimuma libo minimuma ili resheniye izoperimetricheskoy zadachi, vzyatoy v samom shirokom smysle [A method for finding curved lines that have the properties of a maximum or minimum, or the solution of an isoperimetric problem taken in the broadest sense]. Moscow, Leningrad: GITTL, 1934, 600 p.

4. Lavrent'ev M.A., Ishlinskii A.Yu. Dinamicheskiye formy poteri ustoychivosti uprugikh sistem [Dynamic forms of the loss of stability of elastic systems]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1949. T. 64. № 6. C. 779-782.

5. Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruyemykh system [Stability of deformable systems]. M.: Nauka, 1967. 984 p.

6. Belyaev A.K., Il'in D.N., Morozov N.F. Dynamic approach to the Ishlinsky-Lavrent'ev problem. *Mechanics of solids*, 2013, Vol. 48, No 5, pp. 504-508.

7. Morozov N.F., Tovstik P.E., Belyaev A.K., Tovstik T.P. The Ishlinskii-Lavrent'ev problem at the initial stage of motion. *Doklady physics*, 2015, Vol. 60, No 8, pp. 368-371.

8. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Ustoychivost' sterzhnya pri dlitel'nom osevom szhatii [Stability of a rod under the long-term axial compression]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2015, Vol. 77, No 1, pp. 40-48.

9. Farhat C., Wangc K.G., Main A., Kyriakides S., Lee L.-H., Ravi-Chandar K., Belytschko T. Dynamic implosion of underwater cylindrical shells: Experiments and Computations. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, Vol. 50, pp. 2943-2961.

10. Giezen J.J., Babcock C.D., Singer J. Plastic Buckling of Cylindrical Shells Under Biaxial Loading. *Experimental Mechanics*, 1990, Vol. 33, pp. 337-343. doi: 10.1007/BF02325990.

11. Carvelli V., Panzeri N., Poggi C. Buckling strength of GFRP under-water vehicles. *Composites: Part B*, 2001, Vol. 32, pp. 89-101.

12. Ghazijahani T.G., Showkati H. Experiments on conical shell reducers under uniform external pressure. *Journal of Constructional Steel Research*, 2011, Vol. 67, pp. 1506-1515. doi: 10.1016/j.jcsr.2011.03.024.

13. Ilgamov M.A., Ivanov V.A., Gulin B.V. Prochnost', ustoychivost' i dinamika obolochek s uprugim zapolnitelem [Strength, stability and dynamics of shells with elastic core]. Moscow, Nauka, 1977, 331 p.

14. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Vozdeystviye nestatsionarnogo davleniya na tsilindricheskuyu obolochku s uprugim zapolnitelem [Impact of non-stationary pressure on a cylindrical shell with elastic core]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko–Matemfticheskie Nauki,* 2016, V. 158, No 1, pp. 141-151.

15. Bendyukov V.V., Deryushev V. V., Lur'ye M.M., Ovcharov P.N. O vliyanii zapolnitelya na kriticheskiye parametry impul'sa davleniya pri dinamicheskoy potere ustoychivosti tsilindricheskoy obolochki [On the influence of the core on the critical parameters of the pressure impulse with dynamic loss of stability of the cylindrical shell]. *Nauchnyi vestnik MGTU GA,* 2005, No 84(2), pp. 131-137.

16. Dash A.P., Velmurugan R., Prasad M.S.R., Sikarwar R.S. Stability improvement of thin isotropic cylindrical shells with partially filled soft elastic core subjected to external pressure. *Thin–Walled Structures*, B, 2016, Vol. 98, pp. 301–311. doi: 10.1016/j.tws.2015.09.028.

17. Karam G.N., Gibson L.J. Elastic buckling of cylindrical shells with elastic cores. I. *Analysis Int J Solids Structures*, 1995, Vol. 32, pp. 1259-1263.

18. Ye L., Lu G., Ong L.S. Buckling of a thin-walled cylindrical shell with foam core under axial compression. *Thin–Walled Structures*, Vol. 49, No 1, pp. 106–111. doi: 10.1016/j.tws.2010.08.011.

19. Pasternak P.L. Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsiyentov posteli [Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic foundation using two bed coefficients]. Moscow, Gos. izd–vo literatury po stroitel'stvu i arkhitekture, 1954, 56 p.

20. Ivanov V.A. Opredeleniye reaktsii zapolnitelya v zadachakh vzaimodeystviya yego s obolochkoy [Determination of the reaction of the filler in the problems of its interaction with the shell]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta,* 2011, No 8, pp. 224-228.

21. Lugovoy P.Z., Prokopenko N.YA. Vliyaniye uprugogo osnovaniya na dispersiyu garmonicheskikh voln v prodol'no podkreplennykh tsilindricheskikh obolochkakh [Influence of the elastic foundation on the dispersion of harmonic waves in longitudinally reinforced cylindrical shells]. *Prikladnaya mekhanika*, 2015, V. 51, No 5, pp. 116-124.

22. Solomonov YU.S., Georgiyevskiy V.P., Nedbay A.YA., Andryushin V.A. Prikladnyye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied problems of the mechanics of composite cylindrical shells] Mosow, Fizmatlit, 2013, 343 p.

23. Kang G., Wei G., Di W., Chongmin S. Nonlinear dynamic stability of the orthotropic functionally graded cylindrical shell surrounded by Winkler-Pasternak elastic foundation subjected to a linearly increasing load. *Journal of Sound and Vibration,* 2018, No 415, pp. 147-168. doi: 10.1016/j.jsv.2017.11.038.

24. Nobili A., Radi E, Lanzoni N. A cracked infinite Kirchhoff plate supported by a two-parameter elastic foundation. *J Eur Ceram Soc*, 2014. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2013.12.029.

25. Sato M., Wadee M.A., Iiboshi K., Sekizawa T., Shima H. Buckling patterns of complete spherical shells filled with an elastic medium under external pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2012.02.001.

26. Sato M., Harasawa S., Konishi Y., Maruyama T., Park S.J. Power Law of Critical Buckling in Structural Members Supported by a Winkler Foundation. *Journal of Mechanics*, 2017, V. 33, No 3, pp. 369-374. doi:10.1017/jmech.2016.112.

27. Shaterzadeh A.R., Foroutan K. Non-Linear Analysis of Asymmetrical Eccentrically Stiffened FGM Cylindrical Shells with Non-Linear Elastic Foundation. *Journal of Solid Mechanics*, 2017, Vol. 9, No. 4, pp. 849-864.

28. Artem'eva A.A., Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Kibets A.I., Nagornykh Y.V. Large Deformations and Limiting States of Elastoplastic Shells of Revolution under Combined Complex Loadings. *Journal Of Applied Mathematics And Mechanics*, 2015, Vol. 79, iss. 4, pp. 394-402.

29. Artem'eva, AA Bazhenov, VG Nagornykh, EV Kazakov, DA Kuzmicheva, TV Modelling of the non-axisymmetric bulging

of elastoplastic shells of revolution under combined axisymmetric loadings. *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, Vol. 81, Iss. 5, pp. 420-428. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2018.03.010.

30. Bazhenov V.G., Lomunov V.K. Issledovaniye uprugoplasticheskogo vypuchivaniya obolochek vrashcheniya pri udarnom nagruzhenii [Investigation of elastoplastic buckling of shells of revolution under shock loading]. *Prikl. probl. prochnosti i plastichnosti: Vsesoyuz. mezhvuz. sb. Gor'k. un–t,* 1975, V. 2, pp. 44-50.

31. Bazhenov V.G., Nagornykh E.V., Samsonova D.A. Investigation of the Winkler foundation model applicability for describing the contact interaction of elastoplastic shells with a core under external pressure. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 4, pp. 36-48. doi: 10.15593/perm.mech/2020.4.04.

32. Bazhenov V.G., Zhegalov D.V., Pavlenkova Ye.V. Numerical and experimental study of elastoplastic tension-torsion processes in axisymmetric bodies under large deformations. *Mechanics Of Solids*, 2011, Vol. 46, No. 2, pp. 204-212. doi: 10.3103/S0025654411020087.

33. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Nagornykh E.V., Osetrov D.L., Ryabov A.A. Experimental and theoretical study of large deformations of cylindrical samples from steel 09G2S with stress concentrators under tension-torsion loading to failure. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 69-81. doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.06

34. Zefirov S.V. Impul'snoye deformirovaniye i kontaktnoye vzaimodeystviye uprugoplasticheskikh elementov osesimmetrichnykh konstruktsiy [Impulse deformation and contact interaction of elastoplastic elements of axisymmetric structures]. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti. Algoritmizatsiya resheniya zadach uprugosti i plastichnosti. Vsesoyuz. mezhvuz. sb*. Gor'k. un-t, 1984, pp.152-153.

35. Bazhenov V.G., Zefirov S.V., Tsvetkova I.N. Chislennoye modelirovaniye zadach nestatsionarnogo kontaktnogo vzaimodeystviya deformiruyemykh konstruktsiy [Numerical modeling of problems of non-stationary contact interaction of deformable structures]. *Mezhvuz. sb. Prikl. probl. prochnosti i plastichnosti. Chislennoye modelirovaniye fiziko-mekhanicheskikh protsessov.* M.: Tovarishchestvo nauchnykh izdaniy KMK, 1995, V. 52, pp. 154-160.

36. Bazhenov V.G., Zefirov S.V., Kochetkov A.V., Krylov S.V., Fel'dgun V.R. Paket programm «Dinamika-2» dlya resheniya ploskikh i osesimmetrichnykh nelineynykh zadach nestatsionarnogo vzaimodeystviya konstruktsiy so szhimayemymi sredami [Dinamika-2 software package for solving plane and axisymmetric nonlinear problems of unsteady interaction of structures with compressible media]. *Matem. modelirovaniye*. 2000, V. 12 (6), pp. 67-72.

37. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Kibec A.I., Nagornykh E.V., Samsonova D.A. Formulation and Numerical Solution of the Stability Loss Problem of Elastic-Plastic Shells of Revolution with an Elastic Filler under Combined Axisymmetric and Torsional Loadings. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 3, pp. 95-106. doi: 10.15593/perm.mech/2022.3.10.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00904, https://rscf.ru/project/22-29-00904/.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-29-00904, https://rscf.ru/project/22-29-00904/.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.