Папков С.О., Папкова Ю.И., Пасечник В.А. Метод спектральной динамической жесткости в задачах флаттера составных пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 1. С. 90–102. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.09

Papkov S.O., Papkova Yu.I., Pasechnik V.A. Spectral dynamic stiffness method for the flutter problem of combined plates. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 1, pp. 90-102. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.09

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 1, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.09
УДК 539.3

МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ В ЗАДАЧАХ ФЛАТТЕРА СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН

С.О. Папков, Ю.И. Папкова, В.А. Пасечник

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 12 сентября 2022 г.
Одобрена: 10 марта 2023 г.
Принята к публикации:
05 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

составная ортотропная пластина, собственные частоты, флаттер, метод спектральной динамической жесткости, метод Галеркина.

АННОТАЦИЯ

В настоящее время метод спектральной динамической жесткости активно развивается как альтернатива методу конечных элементов для исследования задач колебания и устойчивости составных конструкций из балок, стержней, пластин и оболочек. Данный подход, основанный на точных решениях разрешающих дифференциальных уравнений, позволяет более эффективно исследовать задачу в среднем и высоком диапазоне частот, дает аналитические выражения для собственных форм колебаний. Предлагается использовать преимущества данного метода для исследования проблемы динамической устойчивости и флаттера ортотропной составной пластины в сверхзвуковом потоке газа. Используя приближение поршневой теории, решение краевой задачи ищется согласно методу Галеркина по базису из собственных форм составной пластины в вакууме, которые, в свою очередь, строятся на основе метода спектральной динамической жесткости. Следуя данному подходу, краевая задача сводится к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой зависят от физико-механических и геометрических параметров. Частотный параметр задачи входит в систему линейно, что при редукции бесконечной системы позволяет свести ее исследование к проблеме определения собственных чисел и векторов. Численно исследована сходимость метода Галеркина в зависимости от количества базисных функций. Показано, что удержание в расчетах первых 16 собственных форм в качестве базисных функций оказывается достаточным для обеспечения сходимости метода. Приведены примеры численной реализации, на основе полученного решения проводились исследования зависимости критической скорости потери устойчивости от свойств материала составной пластины и ее геометрии.

© ПНИПУ

© **Папков Станислав Олегович** – д.ф.-м.н., доц., зав. каф., e-mail: stanislav.papkov@gmail.com, iD: 0000-0001-8624-0846.
Папкова Юлия Игоревна – к.ф.-м.н., доц.,, e-mail: yulia.papkova@gmail.com), iD: 0000-0003-4841-2752.
Пасечник Владислав Александрович – асс., e-mail: VAPasechnik@sevsu.ru.

Stanislav O. Papkov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Department, e-mail: stanislav.papkov@gmail.com, iD: 0000-0001-8624-0846.
Yulia I. Papkova – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: yulia.papkova@gmail.com, iD: 0000-0003-4841-2752.
Vladislav A. Pasechnik – Assistant, e-mail: VAPasechnik@sevsu.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

SPECTRAL DYNAMIC STIFFNESS METHOD FOR THE FLUTTER PROBLEM OF COMBINED PLATES

S.O. Papkov, Yu.I. Papkova, V.A. Pasechnik

Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 12 September 2022
Approved: 10 March 2023
Accepted for publication:
05 April 2023

Keywords:

composite orthotropic plate, natural frequency, flutter, spectral dynamic stiffness method, Galerkin method.

ABSTRACT

At present time, the spectral dynamic stiffness method is being actively developed as an alternative to the finite element method for vibration and stability problems of composite structures from beams, rods, plates and shells. This approach, based on exact solutions of governing differential equations, makes it possible to more effectively study the problem in the medium and high frequency ranges, and gives analytical expressions for natural modes. It is proposed to use the advantages of this method to study the problems of dynamic stability and flutter of an orthotropic composite plate in a supersonic gas flow. Using the linear approximation of piston theory, solution of the problem is investigated according to the Galerkin method on the basis of the eigenforms of a composite plate in vacuum. According to this approach the boundary value problem is reduced to a homogeneous infinite linear algebraic system of equations with coefficients are depending from physical-mechanical and geometrical parameters of the problem. The frequency parameter is included in the system linearly, that allows us to reduce eigenproblem for infinite system to the problem of determining the eigenvalues and vectors of a matrix. The convergence of the Galerkin method depending on the number of basis functions is studied numerically. It is shown that the first 16 eigenforms provide the good convergence of the method. Examples of numerical implementation are given, obtained solution allow us to study the dependence of the critical velocity from the properties of the material and geometry of the combined plate.

© PNRPU

Введение

Во многом благодаря явлению панельного флаттера теория динамической устойчивости пластин в сверхзвуковом потоке газа стала предметом пристального внимания научной общественности, начиная с середины прошлого столетия. Существенный вклад в математическое описание этого явления и его понимание внесли работы А.А. Ильюшина, который впервые представил проблему флаттера как проблему аэроупругости в рамках линейного приближения поршневой теории (закон плоских сечений) [1; 2]. Основные результаты по панельному флаттеру пластин представлены в [3; 4]. Заметим, что даже в рамках линейного приближения задача о динамической устойчивости прямоугольных пластин имеет точное аналитическое решение [5–7], лишь когда две противоположные стороны пластины шарнирно оперты либо в случае цилиндрического изгиба панели. Только тогда переменные в разрешающем дифференциальном уравнении разделяются, и оказывается возможным получить решение в форме ряда. В случае других граничных условий, тем более в случае геометрии, отличной от прямоугольной, для решения задачи используются приближенные аналитические методы и численные методы.

В частности, Olson [8] одним из первых применил конечно-элементный подход (FEM) для решения проблемы флаттера. Yang и Han [9] используют FEM для исследования флаттера термически нагруженных плоских панелей. В работе Prakash и Ganapathi [10] также рассмотрен конечно-элементный подход к исследованию панельного флаттера с учетом температурных характеристик газовой среды. Librescu и др. [11] представили исследование флаттера длинной тонкостенной цилиндрической панели в сверхзвуковом потоке. Singha и Mandal [12] исследовали флаттер многослойных композитных пластин и цилиндрических панелей. В работе Bismarck-Nasr и Bones [13] рассмотрены стабилизирующие эффекты структурного демпфирования в задачах флаттера. Song et al. [14] исследуют флаттер плоских консольно-защемленных пластин со структурной нелинейностью в сверхзвуковом потоке газа. Mei et al. [15] используют Fluid-Structure Coupling Algorithm для более точного учета влияния характеристик потока на флаттер панели на основе уравнений Навье – Стокса. В работе [16] представлены результаты эксперимента и численного моделирования для косоугольной панели. Во всех указанных работах авторы используют численный подход при моделировании. Однако, как было замечено в [17], в задачах флаттера применение традиционных численных методов, в том числе метода конечных элементов, зачастую оказывается малоэффективным. По этой причине для задач аэродинамической устойчивости продолжают развиваться аналитико-численные подходы (обзор работ и описание можно найти в монографиях [1; 2; 4; 5]). Например, в статье [18] метод Бубнова – Галеркина используется для исследования флаттера шарнирно-опертой прямоугольной пластины переменной толщины, этот же метод используется в работе [19] для исследования флаттера стенки топливного бака, в качестве базисных функций берутся комбинации тригонометрических функций. Авторы [20]

используют метод Бубнова – Галеркина для анализа панельного флаттера прямоугольной пластины при наличии сжимающих сил в плоскости пластины. Chen и La [21] также используют метод Галеркина для анализа флаттера и нелинейной динамики композитных пластин. Метод Галеркина был также применяется в [22] для анализа флаттера защемленной ортотропной пластин. Заметим, что сходимость и точность метода Бубнова – Галеркина в задачах флаттера во многом зависят от выбора базисных функций.

Метод динамической жесткости (DSM), который развивается в последние годы для решения задач колебаний и устойчивости, имеет ряд преимуществ по сравнению с FEM, так как опирается на точное аналитическое решение для структурного элемента. Wittrick и Williams разработали [23] DSM для изотропных и анизотропных прямоугольных пластин в случае шарнирно-опертых противоположных сторон пластины на основе точного решения уравнения колебаний. Существенное обобщение DSM для пластин с произвольными граничными условиями было предложено [24], которое дало возможность для анализа сложных конструкций с элементами в форме пластин при произвольных классических граничных условиях. Langley [25] представил формулы динамической жесткости для подкрепленных оболочек. Liu [26] развил идеи [24], предложив формулировки динамической жесткости подкрепленной пластины произвольного сечения при произвольных граничных условиях. В работе [27] представлено обобщение результатов для теории толстых пластин. Поскольку элементы динамической жесткости могут быть непосредственно объединены при моделировании сложных конструкций, а также обладают преимуществами высокой эффективности и точности в широком диапазоне частот, многие исследователи разработали программы и применили их для решения сложных инженерных задач. Williams, Banerjee et al. в сотрудничестве с NASA разработал BUNVIS-RG для анализа вибрации и потери устойчивости сложных стержневых конструкций. Williams, Kennedy и др. разработали VICONOPT для анализа вибрации и потери устойчивости конструкций из композитных пластин. Исследовательская группа Liu разработала программы DSM при поддержке китайского фонда NSFC, которые применялись для анализа вибрации конструкций мостов, многослойных грунтов и строительных конструкций, вагонов высокоскоростных поездов.

Несмотря на значительный прогресс, достигнутый за эти годы, DSM все еще не зарекомендовал себя как достаточно универсальный инструмент, такой как FEM, хотя DSM должным образом признан мощной и точной альтернативой FEM, но, по общему признанию, данный подход на сегодняшний день используется для решения узкого круга задач колебаний. В представленной статье предлагается использовать подход DSM при построении собственных форм колебаний составной пластины для последующего их использования в качестве базисных функций метода Галеркина, тем самым расширяя круг приложений на задачи аэродинамической устойчивости.

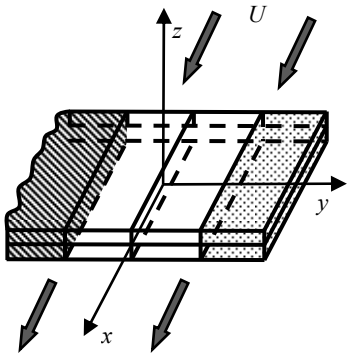


Рис. 1. Составная пластина

Fig. 1. Combined plate

1. Основные уравнения и структура общего решения задачи

Рассмотрим составную конструкцию (рис. 1), отдельными элементами которой являются прямоугольные пластины из различных материалов и разных размеров толщины h, обтекаемую потоком газа в направлении оси Ox. Для каждой отдельной пластины ансамбля упругие свойства ортотропного материала можно описать при помощи четырех упругих констант: модулей Юнга E_1 и E_2 вдоль направления осей x и y, модуля сдвига G и коэффициента Пуассона ν_{12}. Заметим, что согласно тождеству Бетти, второй коэффициент Пуассона ν_{21} можно найти из равенства $\nu_{12} E_2 = \nu_{21} E_1$.

Уравнение, описывающее аэродинамическую устойчивость, может быть записано следующим образом

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \varepsilon \rho h \frac{\partial W}{\partial t} + P = 0, \quad (1)$$

где $W(x, y, t)$ – прогиб; ρ – плотность материала, ε – коэффициент затухания,

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_2 = \frac{\nu_{21} E_1 h^3}{12\nu_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})};$$

$$D_3 = \frac{\nu_{21} E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} + \frac{Gh^3}{6}.$$

Заметим, что в уравнении (1) упругие коэффициенты D_1, D_2 и D_3 и плотность ρ, вообще говоря, различны для каждой отдельной пластины ансамбля, то есть представляют для составной пластины разрывные функции.

В линейном приближении поршневой теории [1; 2] составляющая аэродинамического давления P может быть выражена через прогиб пластины

$$P = \frac{\kappa p_0}{c_0}\left(\frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial x}\right), \quad (2)$$

где p_0 – давление в невозмущенном потоке, c_0 – скорость звука в невозмущенном потоке, κ - показатель политропы газа, U – скорость потока.

Следуя стандартной процедуре, запишем уравнение (1), отделяя временную составляющую $W = w(x, y)e^{\sigma t}$ относительно амплитуды прогиба $w(x, y)$ в виде

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\kappa p_0 U}{c_0}\frac{\partial w}{\partial x}+ \\ +\left(\sigma^2\rho h+\sigma\left(\varepsilon\rho h+\frac{\kappa p_0}{c_0}\right)\right)w=0. \tag{3}$$

Предположим также, что на сторонах составной пластины реализуется комбинация классических граничных условий: защемление (C) – шарнирное опирание (S) – свободный край (F). Например, на сторонах вида $x = a$ эти условия для тонкой ортотропной пластины могут быть записаны в форме

(C) полное защемление

$$w=0;\quad \frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

(S) условие шарнирно опертого края

$$w=0;\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,$$

(F) условие свободного края

$$\begin{cases} M_x=-\left(D_1\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_{12}D_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0; \\ V_x=-\left(D_1\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(D_3+\dfrac{Gh^3}{6}\right)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)=0. \end{cases}$$

На сторонах пластины вида $y = b$ граничные условия записываются аналогично.

Исследование задачи на собственные значения для (3) при указанных граничных условиях позволяет ответить на вопрос об устойчивости колебаний. Действительно [1], колебания пластины будут устойчивы при $\mathrm{Re}\,\sigma < 0$ и обратно, при $\mathrm{Re}\,\sigma > 0$ являются неустойчивыми.

Обозначим как ρ_l и $D_{1,l}$ – плотность и цилиндрическую жесткость в направлении оси Ox каждой отдельной пластины ансамбля, тогда плотность и цилиндрическая жесткость в данном направлении составной пластины могут быть записаны как

$$\overline{\rho}=\sum_l\frac{S_l}{S}\rho_l;\quad \overline{D}_1=\sum_l\frac{S_l}{S}D_{1,l}, \tag{4}$$

где S_l и S – площади l-й составляющей и всей составной пластины соответственно.

Тогда частотный параметр может быть записан в форме

$$\Omega^2=\frac{\overline{\rho}h}{\overline{D}_1}\sigma^2. \tag{5}$$

А уравнение (3) может быть представлено в виде

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+U_0\overline{D}_1\frac{\partial w}{\partial x}=\overline{D}_1\lambda w, \tag{6}$$

где $U_0=\dfrac{\kappa p_0}{c_0\overline{D}_1}U$, $\lambda=-\dfrac{\rho}{\overline{\rho}}\Omega^2-g\Omega$,

$g=\varepsilon\rho\sqrt{\dfrac{h}{\overline{D}_1\overline{\rho}}}+\dfrac{\kappa p_0}{c_0\sqrt{\overline{D}_1\overline{\rho}h}}$.

Заметим, что задача на собственные значения (6) для отдельной пластины достаточно хорошо изучена. Известно [1; 5], что $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, с увеличением параметра скорости U_0 собственные значения λ последовательно переходят в комплексную область. С учетом введенных обозначений критерием устойчивости движения будет условие

$$\begin{cases} \Omega^2+\dfrac{\overline{\rho}g}{\rho}\Omega+\dfrac{\overline{\rho}\lambda}{\rho}=0; \\ \mathrm{Re}\,\Omega<0. \end{cases} \tag{7}$$

Предположим далее, что известна система собственных функций пластины $\left\{w_m^0(x,y)\right\}$ в вакууме, соответствующая собственным частотам колебаний $\{\omega_m\}$ при тех же граничных условиях, что и исходная задача аэроупругости. Тогда будет верно, что

$$D_1\frac{\partial^4 w_m^0}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w_m^0}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w_m^0}{\partial y^4}=\overline{D}_1\omega_m^2 w_m^0. \tag{8}$$

Следуя процедуре метода Бубнова – Галеркина [1], решение задачи будем искать в виде ряда по системе собственных функций составной пластины в вакууме

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m w_m^0(x,y). \tag{9}$$

Форма решения (9) такова, что удовлетворяет краевым условиям на сторонах составной пластины, таким образом, остается выполнить разрешающее дифференциальное уравнение (6). Подставим (9) в дифференциальное уравнение (6), тогда, учитывая дифференциальное соотношение (8), получаем равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\lambda-\omega_n^2\right)w_n^0=U_0\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\partial w_n^0}{\partial x}. \tag{10}$$

Учтем также, что собственные функции $\left\{w_m^0(x,y)\right\}$ являются ортогональными в функциональном пространстве интегрируемых с квадратом функций в области K, которую занимает составная пластина, то есть при $m \neq n$:

$$\iint_K w_m^0 w_n^0\,dxdy=0. \tag{11}$$

Умножая (10) на $w_m^0(x,y)$ и интегрируя по области пластины K с учетом ортогональности (11), получаем однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\gamma_m\left(\lambda-\omega_m^2\right)A_m = U_0\sum_{n=1}^{\infty}M_{mn}A_n,\ (m=1,2,\ldots), \quad (12)$$

где $M_{mn}=\iint\limits_K w_m^0\frac{\partial w_n^0}{\partial x}dxdy;\ \gamma_m=\iint\limits_K (w_m^0)^2\,dxdy.$

Очевидно, что при практической реализации уравнения (12) дают задачу на собственные числа λ для матрицы с элементами

$$\Lambda_N=\left\{\delta_{mn}\omega_m^2+\frac{U_0M_{mn}}{\gamma_m}\right\}_{m,n=1}^{N}, \quad (13)$$

(δ_{mn} – символ Кронекера) при $N\to\infty$, а определитель матрицы

$$\det\left(\Lambda_N-\lambda E_N\right)=0 \quad (14)$$

может рассматриваться как дисперсионное уравнение для определения собственных чисел λ.

В [1] доказывается сходимость определителя (14) в случае шарнирно-опертых краев прямоугольной пластины (напомним, в этом случае задача аэроупругости имеет точное решение в виде тригонометрического ряда), соответственно сходится и процесс вычисления собственных чисел λ. Для полностью защемленной ортотропной пластины процесс сходимости (14) был исследован в [22] численно, было показано, что удержание $N=16$ базисных функций в представлении (9) обеспечивает хорошую сходимость метода Бубнова – Галеркина.

Таким образом, алгоритм исследования устойчивости для составной пластины имеет вид:

1) при заданном значении параметра скорости U_0, из (13), (14) определяются собственные значения $\{\lambda_j\}$;

2) для каждого собственного значения λ_j определяются соответствующие корни $\{\Omega_{jl}^{\pm}\}$ квадратного уравнения (7) для каждой l-й пластины ансамбля;

3) проводится проверка корней $\{\Omega_{jl}^{\pm}\}$ на устойчивость: $\mathrm{Re}\,\Omega<0$.

4) проходя диапазон изменения U_0 от нуля с некоторым малым шагом, находится критическое значение параметра скорости $U_0^{кр}$, при котором одно из значений $\{\Omega_{jl}^{\pm}\}$ дает неустойчивость, т.е. $\mathrm{Re}\,\Omega_{jl}^{\pm}\ge 0$.

2. Метод спектральной динамической жесткости

Рассмотрим структурный элемент в виде ортотропной прямоугольной пластины (рис. 2), колебания которого описываются уравнением (8).

Пусть на границах пластины $x=\pm a$ и $y=\pm b$ заданы кинематические характеристики (w, φ_x, φ_y) и силовые характеристики (M_x, M_y, V_x, V_y) пластины в виде

$$d=\begin{bmatrix}w_a^+\\ \varphi_a^+\\ w_b^+\\ \varphi_b^+\\ w_a^-\\ \varphi_a^-\\ w_b^-\\ \varphi_b^-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w(a,y)\\ \varphi_y(a,y)\\ w(x,b)\\ \varphi_x(x,b)\\ w(-a,y)\\ \varphi_y(-a,y)\\ w(x,-b)\\ \varphi_x(x,-b)\end{bmatrix}\ \text{и}\ f=\begin{bmatrix}V_a^+\\ M_a^+\\ V_b^+\\ M_b^+\\ V_a^-\\ M_a^-\\ V_b^-\\ M_b^-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_x(a,y)\\ M_x(a,y)\\ V_y(x,b)\\ M_y(x,b)\\ V_x(-a,y)\\ M_x(-a,y)\\ V_y(x,-b)\\ M_y(x,-b)\end{bmatrix}, \quad (15)$$

где, согласно теории тонких ортотропных пластин,

$$\varphi_x=\frac{\partial w}{\partial y};\ \varphi_y=\frac{\partial w}{\partial x}; \quad (16)$$

$$V_x=-\left(D_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(D_3+2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right);$$
$$V_y=-\left(D_2\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(D_3+2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right); \quad (17)$$

$$M_x=-\left(D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$
$$M_y=-\left(D_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \quad (18)$$

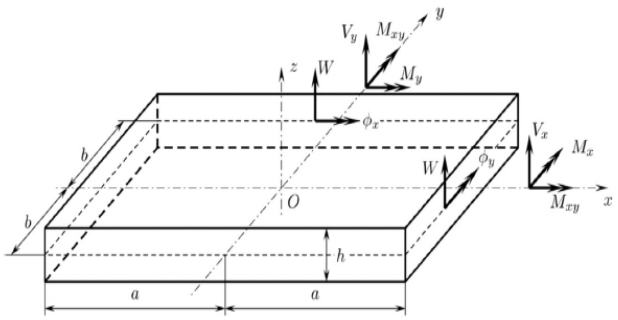


Рис. 2. Структурный элемент в виде прямоугольной пластины

Fig. 2. Structural element in the form of rectangular plate

Далее введем разложение этих величин в ряды по модифицированной тригонометрической системе функций $\{T_k\}$:

$$d=\sum_{k=0}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}W_{an}^{+k}T_k(\beta_{nk}y)\\ \varphi_{an}^{+k}T_k(\beta_{nk}y)\\ W_{bn}^{+k}T_k(\alpha_{nk}x)\\ \varphi_{bn}^{+k}T_k(\alpha_{nk}x)\\ W_{an}^{-k}T_k(\beta_{nk}y)\\ \varphi_{an}^{-k}T_k(\beta_{nk}y)\\ W_{bn}^{-k}T_k(\alpha_{nk}x)\\ \varphi_{bn}^{-k}T_k(\alpha_{nk}x)\end{bmatrix}\ \text{и}\ f=\sum_{k=0}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}V_{an}^{+k}T_k(\beta_{nk}y)\\ M_{an}^{+k}T_k(\beta_{nk}y)\\ V_{bn}^{+k}T_k(\alpha_{nk}x)\\ M_{bn}^{+k}T_k(\alpha_{nk}x)\\ V_{an}^{-k}T_k(\beta_{nk}y)\\ M_{an}^{-k}T_k(\beta_{nk}y)\\ V_{bn}^{-k}T_k(\alpha_{nk}x)\\ M_{bn}^{-k}T_k(\alpha_{nk}x)\end{bmatrix}, \quad (19)$$

где тригонометрические функции T_k в зависимости от типа симметрии определяются следующим образом

$$T_k(z)=\cos\left(\frac{\pi k}{2}-z\right)=\begin{Bmatrix}\cos z, & k=0\\ \sin z, & k=1\end{Bmatrix}. \tag{20}$$

Константы разделения в (19) выбираются в форме

$$\alpha_{nk}=\frac{\pi}{a}\left(n-1+\frac{k}{2}\right),\quad \beta_{nk}=\frac{\pi}{b}\left(n-1+\frac{k}{2}\right). \tag{21}$$

Заметим, что при подобном выборе, вне зависимости от типа симметрии, будет верно

$$T_k(\alpha_{nk}a)=T_j(\beta_{nj}b)=(-1)^{n+1}\ \text{ и }\ T_k'(\alpha_{nk}a)=T_j'(\beta_{nj}b)=0.$$

Под спектральной динамической матрицей жесткости пластины будем понимать такую, вообще говоря, бесконечную матрицу **K**, которая дает связь между коэффициентами Фурье кинематических и силовых граничных характеристик (19).

$$f_s=\mathbf{K}\cdot d_s, \tag{22}$$

где

$$d_s=\left\{w_{an}^{+0},w_{an}^{+1},\varphi_{an}^{+0},\varphi_{an}^{+1},w_{bn}^{+0},w_{bn}^{+1},\varphi_{bn}^{+0},\varphi_{bn}^{+1},w_{an}^{-0},\right.$$
$$\left.w_{an}^{-1},\varphi_{an}^{-0},\varphi_{an}^{-1},w_{bn}^{-0},w_{bn}^{-1},\varphi_{bn}^{-0},\varphi_{bn}^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty},$$
$$f_s=\left\{V_{an}^{+0},V_{an}^{+1},M_{an}^{+0},M_{an}^{+1},V_{bn}^{+0},V_{bn}^{+1},M_{bn}^{+0},M_{bn}^{+1},V_{an}^{-0},V_{an}^{-1},\right.$$
$$\left.M_{an}^{-0},M_{an}^{-1},V_{bn}^{-0},V_{bn}^{-1},M_{bn}^{-0},M_{bn}^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

В частности, общее решение для уравнения колебаний (8) может быть построено с учетом обозначений (20) для всех четырех случаев симметрии в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}(A_nH_j(p_{nk}y)+B_nH_j(\overline{p}_{nk}y))T_k(\alpha_{nk}x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nH_k(q_{nj}x)+D_nH_k(\overline{q}_{nj}x))T_j(\beta_{nj}y), \tag{23}$$

где $H_0=\mathrm{ch}(z)$ и $H_1=\mathrm{sh}(z)$.

Величины $p_{nk},\overline{p}_{nk}$ и $q_{nj},\overline{q}_{nj}$ являются корнями следующих характеристических уравнений

$$D_2p^4-2D_3\alpha^2p^2+D_1\alpha^4-\overline{D}_1\omega^2=0,$$
$$D_1q^4-2D_3\beta^2q^2+D_2\beta^4-\overline{D}_1\omega^2=0.$$

Из предыдущей статьи [24] можно увидеть, что анализ каждого случая симметрии представляет собой отдельную задачу, при этом приходится отдельно удерживать слагаемые, отвечающие постоянным составляющим в тригонометрических разложениях. Предложенная форма общего решения (23) позволяет унифицировать эти выкладки и получить единообразные выражения для всех случаев симметрии.

Далее, вычисляя углы поворота и сдвиговые силы по (16), (17), получаем

$$\varphi_y=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{kj}H_j(p_{nk}y)+B_n^{kj}H_j(\overline{p}_{nk}y))\alpha_{nk}T_k'(\alpha_{nk}x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{kj}q_{nj}H_k'(q_{nj}x)+D_n^{kj}\overline{q}_{nj}H_k'(\overline{q}_{nj}x))T_j(\beta_{nj}y); \tag{24}$$

$$\varphi_x=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{kj}p_{nk}H_j'(p_{nk}y)+B_n^{kj}\overline{p}_{nk}H_j'(\overline{p}_{nk}y))T_k(\alpha_{nk}x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{kj}H_k(q_{nj}x)+D_n^{kj}H_k(\overline{q}_{nj}x))\beta_{nj}T_j'(\beta_{nj}y); \tag{25}$$

$$V_x=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{kj}\left[D_1\alpha_{nk}^2-(D_3+2D_{66})p_{nk}^2\right]H_j(p_{nk}y)+$$
$$+B_n^{kj}\left[D_1\alpha_{nk}^2-(D_3+2D_{66})\overline{p}_{nk}^2\right]H_j(\overline{p}_{nk}y))\alpha_{nk}T_k'(\alpha_{nk}x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{kj}q_{nj}\left[(D_3+2D_{66})\beta_{nj}^2-D_1q_{nj}^2\right]H_k'(q_{nj}x)+$$
$$+D_n^{kj}\overline{q}_{nj}\left[(D_3+2D_{66})\beta_{nj}^2-D_1\overline{q}_{nj}^2\right]H_k'(\overline{q}_{nj}x))T_j(\beta_{nj}y); \tag{26}$$

$$V_y=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{kj}p_{nk}\left[(D_3+2D_{66})\alpha_{nk}^2-D_2p_{nk}^2\right]H_j'(p_{nk}y)+$$
$$+B_n^{kj}\overline{p}_{nk}\left[(D_3+2D_{66})\alpha_{nk}^2-D_2\overline{p}_{nk}^2\right]H_j'(\overline{p}_{nk}y))T_k(\alpha_{nk}x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{kj}\left[D_2\beta_{nj}^2-(D_3+2D_{66})q_{nj}^2\right]H_k(q_{nj}x)+$$
$$+D_n^{kj}\left[D_2\beta_{nj}^2-(D_3+2D_{66})\overline{q}_{nj}^2\right]H_k(\overline{q}_{nj}x))\beta_{nj}T_j'(\beta_{nj}y). \tag{27}$$

Выразим неопределенные коэффициенты C_n^{kj} и D_n^{kj} для каждого случая симметрии (k,j) через коэффициенты разложения величин $\varphi_y(\pm a,y),V_x(\pm a,y)$. Приравнивая записанные выше выражения с граничными разложениями (19), складывая и вычитая данные равенства, получаем систему четырех уравнений относительно неопределенных констант C_n^{kj} и D_n^{kj}:

$$C_n^{0j}q_{nj}H_0'(q_{nj}a)+D_n^{0j}\overline{q}_{nj}H_0'(\overline{q}_{nj}a)=\frac{\varphi_{an}^{+j}-\varphi_{an}^{-j}}{2};$$

$$C_n^{1j}q_{nj}H_1'(q_{nj}a)+D_n^{1j}\overline{q}_{nj}H_1'(\overline{q}_{nj}a)=\frac{\varphi_{an}^{+j}+\varphi_{an}^{-j}}{2};$$

$$C_n^{0j}q_{nj}\left[(D_3+2D_{66})\beta_{nj}^2-D_1q_{nj}^2\right]H_0'(q_{nj}a)+$$
$$+D_n^{0j}\overline{q}_{nj}\left[(D_3+2D_{66})\beta_{nj}^2-D_1\overline{q}_{nj}^2\right]H_0'(\overline{q}_{nj}a)=\frac{V_{an}^{+j}-V_{an}^{-j}}{2};$$
$$C_n^{1j}q_{nj}\left[(D_3+2D_{66})\beta_{nj}^2-D_1q_{nj}^2\right]H_1'(q_{nj}a)+$$
$$+D_n^{1j}\overline{q}_{nj}\left[(D_3+2D_{66})\beta_{nj}^2-D_1\overline{q}_{nj}^2\right]H_1'(\overline{q}_{nj}a)=\frac{V_{an}^{+j}+V_{an}^{-j}}{2}.$$

Из данных соотношений можно выразить константы C_n^{kj} и D_n^{kj} следующим образом

$$C_n^{kj}q_{nj}H_k'(q_{nj}a)=\frac{D_1\overline{q}_{nj}^2-(D_3+2D_{66})\beta_{nj}^2}{D_1(\overline{q}_{nj}^2-q_{nj}^2)}\cdot\varphi_{an}^{kj}+\frac{1}{D_1(\overline{q}_{nj}^2-q_{nj}^2)}\cdot V_{an}^{kj};$$
$$D_n^{kj}\overline{q}_{nj}H_k'(\overline{q}_{nj}a)=-\frac{D_1q_{nj}^2-(D_3+2D_{66})\beta_{nj}^2}{D_1(\overline{q}_{nj}^2-q_{nj}^2)}\cdot\varphi_{an}^{kj}-\frac{1}{D_1(\overline{q}_{nj}^2-q_{nj}^2)}\cdot V_{an}^{kj}, \tag{28}$$

где $\varphi_{an}^{kj}=\dfrac{\varphi_{an}^{+j}-(-1)^k\varphi_{an}^{-j}}{2}$, $V_{an}^{kj}=\dfrac{V_{an}^{+j}-(-1)^kV_{an}^{-j}}{2}$.

Аналогичным образом можно выразить величины A_n^{kj},B_n^{kj} через коэффициенты разложений (19) величин $\varphi_x(x,\pm b)$ и $V_y(x,\pm b)$ как

$$A_n^{kj}\, p_{nk} H_j'(p_{nk} b) = \frac{D_2 \overline{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2}{D_2(\overline{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} \cdot \varphi_{bn}^{kj} + \frac{1}{D_2(\overline{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} \cdot V_{bn}^{kj};$$

$$B_n^{kj}\, \overline{p}_{nk} H_j'(\overline{p}_{nk} b) = -\frac{D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2}{D_2(\overline{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} \cdot \varphi_{bn}^{kj} - \frac{1}{D_2(\overline{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} \cdot V_{bn}^{kj}, \qquad (29)$$

где $\varphi_{bn}^{kj} = \dfrac{\varphi_{bn}^{+k} - (-1)^j \varphi_{bn}^{-k}}{2}$, $V_{bn}^{kj} = \dfrac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2}$.

Используя формулы (28) и (29), функция прогиба пластины w может быть выражена через коэффициенты Фурье граничных характеристик (19) в виде

$$w = \sum_{k,j=0}^{1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{H_j(p_{nk} y)}{p_{nk} H_j'(p_{nk} b)} \left[\left(D_2 \overline{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2 \right) \varphi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj} \right] - \frac{H_j(\overline{p}_{nk} y)}{\overline{p}_{nk} H_j'(\overline{p}_{nk} b)} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left[\left(D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2 \right) \varphi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj} \right] \right\} \frac{T_k(\alpha_{nk} x)}{D_2(\overline{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} +$$
$$+ \left\{ \frac{H_k(q_{nj} x)}{q_{nj} H_j'(q_{nj} a)} \left[\left(D_1 \overline{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 \right) \varphi_{an}^{kj} + V_{an}^{kj} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{H_k(\overline{q}_{nj} x)}{\overline{q}_{nj} H_j'(\overline{q}_{nj} a)} \left[\left(D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 \right) \varphi_{an}^{kj} + V_{an}^{kj} \right] \right\} \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{D_1(\overline{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} \Bigg\}. \qquad (30)$$

Подставляя в формулы моментов M_x и M_y вместо неопределенных коэффициентов C_n^{kj}, D_n^{kj} и A_n^{kj}, B_n^{kj} представления (28) и (29) через коэффициенты Фурье граничных разложений, получаем, что и значения функции прогиба w, и значения моментов M_x, M_y оказываются выраженными через коэффициенты Фурье граничных значений φ_x, φ_y и V_x, V_y. Далее, приравнивая полученные выражения для прогиба w, и моментов M_x, M_y к их граничным представлениям (19), можно получить связь между коэффициентами Фурье $\varphi_{an}^{\pm j}, \varphi_{bn}^{\pm k}, V_{an}^{\pm j}, V_{bn}^{\pm k}$ и коэффициентами $w_{an}^{\pm j}, w_{bn}^{\pm k}, M_{an}^{\pm j}, M_{bn}^{\pm k}$.

Рассмотрим вывод подобного соотношения для $w(\pm a, y)$. Положим $x = \pm a$ в формуле (30) и приравняем к соответствующему граничному разложению из (19)

$$w(\pm a, y) = \sum_{k,j=0}^{1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{H_j(p_{nk} y)}{p_{nk} H_j'(p_{nk} b)} \left[\left(D_2 \overline{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2 \right) \varphi_{bn}^{kj} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + V_{bn}^{kj} \right] - \frac{H_j(\overline{p}_{nk} y)}{\overline{p}_{nk} H_j'(\overline{p}_{nk} b)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\left(D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2 \right) \varphi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj} \right] \right\} \frac{(\pm 1)^k (-1)^{n+k}}{D_2(\overline{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} +$$
$$+ (\pm 1)^k \left\{ \frac{H_k(q_{nj} a)}{q_{nj} H_j'(q_{nj} a)} \left[\left(D_1 \overline{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 \right) \varphi_{an}^{kj} + V_{an}^{kj} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{H_k(\overline{q}_{nj} a)}{\overline{q}_{nj} H_j'(\overline{q}_{nj} a)} \left[\left(D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 \right) \varphi_{an}^{kj} + V_{an}^{kj} \right] \right\} \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{D_1(\overline{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} \Bigg\} =$$
$$= \sum_{j=0}^{1} \sum_{n=1}^{\infty} W_{an}^{\pm j} T_j(\beta_{nj} y).$$

Переходя далее к двум равенствам для выражений

$$\frac{w(a, y) \pm w(-a, y)}{2},$$

можно получить следующие соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{H_j(p_{nk} y) \left[\left(D_2 \overline{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2 \right) \varphi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj} \right]}{D_2(\overline{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2) p_{nk} H_j'(p_{nk} b)} - \right.$$
$$\left. - \frac{H_j(\overline{p}_{nk} y) \left[\left(D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2 \right) \varphi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj} \right]}{(\overline{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2) \overline{p}_{nk} H_j'(\overline{p}_{nk} b)} \right\} (-1)^{n+k} +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{H_k(q_{nj} a) \left[\left(D_1 \overline{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 \right) \varphi_{an}^{kj} + V_{an}^{kj} \right]}{q_{nj} H_j'(q_{nj} a)} - \right.$$
$$\left. - \frac{H_k(\overline{q}_{nj} a) \left[\left(D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2 \right) \varphi_{an}^{kj} + V_{an}^{kj} \right]}{\overline{q}_{nj} H_j'(\overline{q}_{nj} a)} \right\} \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{D_1(\overline{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} w_{an}^{kj} T_j(\beta_{nj} y), \qquad (31)$$

где $w_{an}^{kj} = \dfrac{w_{an}^{+j} + (-1)^k w_{an}^{-j}}{2}$.

Для алгебраизации последнего функционального равенства используем разложение входящих в него гиперболических функций по тригонометрической системе $\{T_j(\beta_{nj} y)\}$ согласно известным формулам [28], которые с учетом введенных обозначений принимают вид

$$\frac{H_j(p y)}{H_j'(p b)} = \frac{p}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \left(2 - \delta_{j0}\delta_{1m} \right)}{\beta_{mj}^2 + p^2} T_j(\beta_{mj} y). \qquad (32)$$

Тогда, подставляя (32) в равенства (31) и меняя порядок суммирования, получаем после алгебраических преобразований первую часть уравнений бесконечной системы линейных уравнений, связывающей коэффициенты граничных разложений

$$\frac{2 - \delta_{j0}\delta_{1m}}{b D_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{\left(D_2 \beta_{mj}^2 + D_{12} \alpha_{nk}^2 \right) \varphi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \overline{q}_{mj}^2)} +$$
$$+ \left(\frac{H_k(q_{mj} a)}{H_k'(q_{mj} a)} \cdot \frac{D_1 \overline{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{mj}^2}{q_{mj}(\overline{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{H_k(\overline{q}_{mj} a)}{H_k'(\overline{q}_{mj} a)} \cdot \frac{D_1 q_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{mj}^2}{\overline{q}_{mj}(\overline{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} \right) \frac{\varphi_{am}^{kj}}{D_1} +$$
$$+ \left(\frac{q_{mj} H_k'(q_{mj} a)}{H_k(q_{mj} a)} - \frac{\overline{q}_{mj} H_k'(\overline{q}_{mj} a)}{H_k(\overline{q}_{mj} a)} \right) \frac{V_{am}^{kj}}{D_1(\overline{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} = w_{am}^{kj}. \qquad (33)$$

$(m = 1, 2, \ldots)$

Рассматривая граничные соотношения $w(x,\pm b), M_x(\pm a, y)$ и $M_y(x,\pm b)$, можно аналогично получить другие уравнения системы. Если обозначить

$$w_{bn}^{kj}=\frac{w_{bn}^{+k}+(-1)^j w_{bn}^{-k}}{2}, M_{an}^{kj}=\frac{M_{an}^{+j}+(-1)^k M_{an}^{-j}}{2}, \quad M_{bn}^{kj}=\frac{M_{bn}^{+k}+(-1)^j M_{bn}^{-k}}{2}, \tag{34}$$

данные соотношения можно записать в форме бесконечной системы линейных уравнений

$$\frac{2-\delta_{j0}\delta_{1m}}{bD_1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{\left(D_2\beta_{mj}^2+D_{12}\alpha_{nk}^2\right)\varphi_{bn}^{kj}+V_{bn}^{kj}}{(\alpha_{nk}^2+q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2+\overline{q}_{mj}^2)}+$$

$$+\Delta_m^1\varphi_{am}^{kj}+\Delta_m^2 V_{am}^{kj}=w_{am}^{kj}; \tag{35}$$

$$\frac{2-\delta_{j0}\delta_{1m}}{bD_1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{\left(\left(D_3^2-4D_{66}^2-D_1D_2\right)\beta_{mj}^2\alpha_{nk}^2-D_{12}\overline{D}_1\omega^2\right)\varphi_{bn}^{kj}-\left(D_{12}\beta_{mj}^2+D_1\alpha_{nk}^2\right)V_{bn}^{kj}}{(\alpha_{nk}^2+q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2+\overline{q}_{mj}^2)}+$$

$$+\Delta_m^3\varphi_{am}^{kj}+\Delta_m^4 V_{am}^{kj}=-M_{am}^{kj}; \tag{36}$$

$$\frac{2-\delta_{k0}\delta_{1m}}{aD_2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{\left(D_1\alpha_{mk}^2+D_{12}\beta_{nj}^2\right)\varphi_{an}^{kj}+V_{an}^{kj}}{(\beta_{nj}^2+p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2+\overline{p}_{mk}^2)}+$$

$$+\Delta_m^5\varphi_{bm}^{kj}+\Delta_m^6 V_{bm}^{kj}=w_{bm}^{kj}; \tag{37}$$

$$\frac{2-\delta_{k0}\delta_{1m}}{aD_2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{\left(\left(D_3^2-4D_{66}^2-D_1D_2\right)\beta_{nj}^2\alpha_{mk}^2-D_{12}\overline{D}_1\omega^2\right)\varphi_{an}^{kj}-\left(D_{12}\alpha_{mk}^2+D_2\beta_{nj}^2\right)V_{an}^{kj}}{(\beta_{nj}^2+p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2+\overline{p}_{mk}^2)}+$$

$$+\Delta_m^7\varphi_{bm}^{kj}+\Delta_m^8 V_{bm}^{kj}=-M_{bm}^{kj}; \tag{38}$$

$$(m=1,2,...),$$

где $\mathrm{Cth}_k(z)=\dfrac{H_k(z)}{H_k'(z)}$;

$$D_1\Delta_m^1=\frac{D_1\overline{q}_{mj}^2-(D_3+2D_{66})\beta_{mj}^2}{q_{mj}(\overline{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\mathrm{Cth}_k(q_{mj}a)-$$
$$-\frac{D_1q_{mj}^2-(D_3+2D_{66})\beta_{mj}^2}{\overline{q}_{mj}(\overline{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\mathrm{Cth}_k(\overline{q}_{mj}a);$$

$$D_1\Delta_m^2=\frac{1}{(\overline{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\left(q_{mj}\mathrm{Cth}_k(q_{mj}a)-\overline{q}_{mj}\mathrm{Cth}_k(\overline{q}_{mj}a)\right);$$

$$D_1\Delta_m^3=\frac{(D_1\overline{q}_{mj}^2-(D_3+2D_{66})\beta_{mj}^2)(D_1q_{mj}^2-D_{12}\beta_{mj}^2)}{q_{mj}(\overline{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\mathrm{Cth}_k(q_{mj}a)-$$
$$-\frac{(D_1q_{mj}^2-(D_3+2D_{66})\beta_{mj}^2)(D_1\overline{q}_{mj}^2-D_{12}\beta_{mj}^2)}{\overline{q}_{mj}(\overline{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\mathrm{Cth}_k(\overline{q}_{mj}a);$$

$$D_1\Delta_m^4=\frac{D_1q_{mj}^2-D_{12}\beta_{mj}^2}{q_{mj}(\overline{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\mathrm{Cth}_k(q_{mj}a)-$$
$$-\frac{D_1\overline{q}_{mj}^2-D_{12}\beta_{mj}^2}{\overline{q}_{mj}(\overline{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\mathrm{Cth}_k(\overline{q}_{mj}a);$$

$$D_2\Delta_m^5=\frac{D_2\overline{p}_{mk}^2-(D_3+2D_{66})\alpha_{mk}^2}{p_{mk}(\overline{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\mathrm{Cth}_j(p_{mk}b)-$$
$$-\frac{D_2p_{mk}^2-(D_3+2D_{66})\alpha_{mk}^2}{\overline{p}_{mk}(\overline{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\mathrm{Cth}_j(\overline{p}_{mk}b);$$

$$D_2\Delta_m^6=\frac{1}{(\overline{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\left(p_{mk}\mathrm{Cth}_j(p_{mk}b)-\overline{p}_{mk}\mathrm{Cth}_j(\overline{p}_{mk}b)\right);$$

$$D_2\Delta_m^7=\frac{(D_2\overline{p}_{mk}^2-(D_3+2D_{66})\alpha_{mk}^2)(D_2p_{mk}^2-D_{12}\alpha_{mk}^2)}{p_{mk}(\overline{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\mathrm{Cth}_j(p_{mk}b)-$$
$$-\frac{(D_2p_{mk}^2-(D_3+2D_{66})\alpha_{mk}^2)(D_2\overline{p}_{mk}^2-D_{12}\alpha_{mk}^2)}{\overline{p}_{mk}(\overline{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\mathrm{Cth}_j(\overline{p}_{mk}b);$$

$$D_2\Delta_m^8=\frac{D_2p_{mk}^2-D_{12}\alpha_{mk}^2}{p_{mk}(\overline{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\mathrm{Cth}_j(p_{mk}b)-$$
$$-\frac{D_2\overline{p}_{mk}^2-D_{12}\alpha_{mk}^2}{\overline{p}_{mk}(\overline{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\mathrm{Cth}_j(\overline{p}_{mk}b).$$

Таким образом, уравнения (35)–(38) определяют связь между граничными значениями кинематических и силовых характеристик пластины, а бесконечная матрица системы позволяет найти спектральную динамическую матрицу жесткости (22), которая в точной постановке задачи также является бесконечной. При практической реализации данная бесконечная матрица приближенно редуцируется в конечную матрицу порядка *N*.

Процедура стыковки матриц динамической жесткости каждой из пластин ансамбля близка к аналогичной процедуре метода конечных элементов, но с тем отличием, что стыковка проводится не через точечные узлы, а через линии стыковки, в которых полагаем совпадающими кинематические и силовые характеристики.

3. Численные результаты

Представленный в статье алгоритм исследования динамической устойчивости составных пластин был реализован в среде пакета Mathematica. При этом на первом этапе для заданных физико-механических и геометрических параметров составной пластины рассчитывались на основе метода спектральной динамической жесткости первые собственные частоты колебаний пластины ω_m в вакууме и соответствующие им собственные формы $\left\{w_m^0(x,y)\right\}$, далее реализовывался алгоритм Бубнова – Галеркина, описанный в первом разделе статьи.

В качестве численного примера рассмотрим составную пластину (рис. 3), левая половина которой – стальная пластина с упругими параметрами $\rho=7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3, $E=1{,}9982\cdot10^{11}$ Па, $\nu=0{,}3$, а правая половина – алюминиевая пластина с параметрами $\rho=2{,}75\cdot10^3$ кг/м^3, $E=0{,}7\cdot10^{11}$ Па, $\nu=0{,}34$. Воздушный поток имеет следующие характеристики $p_0=1{,}0126\cdot10^5$ Па, $\rho_0=1{,}2928$

кг/м^3, $\kappa = 1,4.$. В табл. 1 представлены первые собственные частоты $\{\omega_n\}$ данной составной пластины при полностью защемленных краях, вычисленные при помощи метода динамической жесткости.

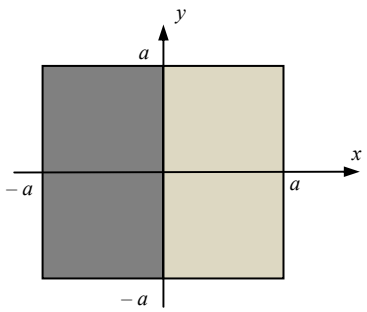


Рис. 3. Составная пластина

Fig.3. Combined plate

Таблица 1

Первые собственные частоты составной пластины (сталь – алюминий) при полностью защемленных краях

Table 1

First natural frequencies of combined square plate (steel – aluminum) with fully clamped edges

N	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_n Составная пластина (сталь – алюминий)	8,2866	16,4471	17,4486	25,9315	28,0328	30,0151	38,1868	40,0120

Собственные частоты пластины в вакууме $\{\omega_n\}$ дают возможность, согласно (30), получить аналитическое представление для соответствующих собственных форм колебаний $w_m^0(x,y)$ и аналитически вычислить значение интегралов из (12), что позволяет эффективно реализовать алгоритм метода Бубнова – Галеркина. В табл. 2 представлена сходимость этого метода при увеличении числа N, удерживаемых в расчетах собственных форм $w_m^0(x,y)$. Толщина пластины в расчетах принималась $h/b = 0{,}0065$.

Таблица 2

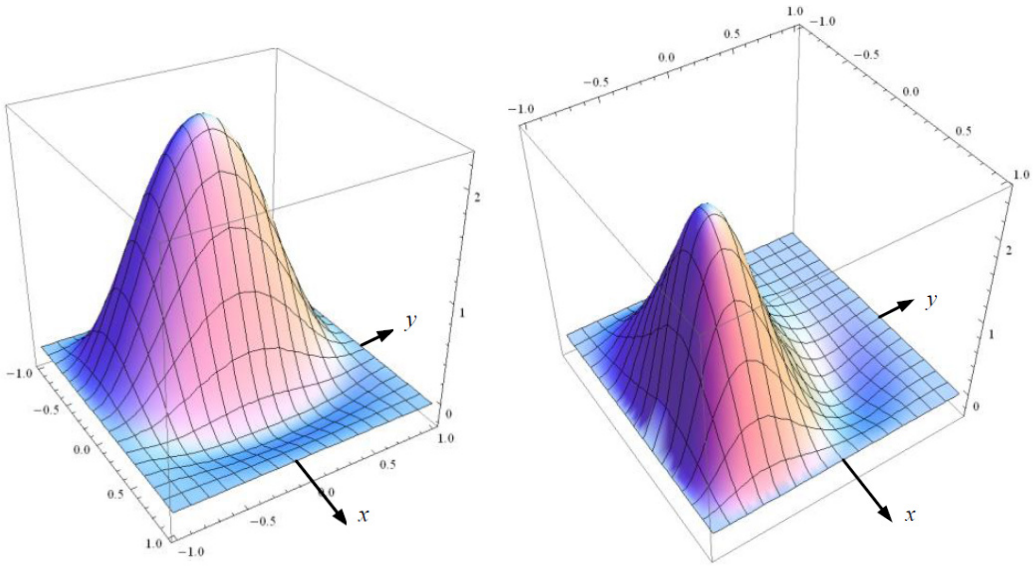
Сходимость метода Бубнова – Галеркина для составной пластины

Table 2

Convergence of Bubnoff – Galerkin method for the combined plate

N	U_0
8	128,76
12	94,77
16	96,92
20	96,92

Из данных табл. 2 можно увидеть, что $N = 8$ собственных форм недостаточно для получения достоверных данных, в то время как при $N = 16$ метод сходится с достаточной точностью. Заметим, что похожая ситуация со сходимостью метода Бубнова – Галеркина наблюдается и для других значений геометрических и упругих параметров задачи. На рис. 4 представлены формы потери устойчивости составной пластины (см. рис. 3) в двух случаях, когда воздушный поток направлен в направлении оси Ox (a) и когда воздушный поток направлен в направлении оси Oy (b). Можно увидеть, что в обоих случаях вспучивается часть пластины, противоположная направлению потока.



a *b*

Рис. 4. Формы потери устойчивости квадратной составной пластины сталь–алюминий: a – $U_0 = 96.22$; b – $U_0 = 93{,}02$

Fig. 4. Buckling forms for the square combined plate steel–aluminum: a – $U_0 = 96.22$; b – $U_0 = 93{,}02$

Аналогичную ситуацию можно наблюдать и для форм потери устойчивости у однородных пластин при различных граничных условиях [2; 17; 22]. Составной характер представленной в примере пластины проявляется, скорее, количественно. Так, благодаря тому, что правая половина пластины сделана из более податливого материала (алюминий), в сравнении с аналогичной формой однородной пластины (рис. 5) правая часть составной пластины оказывается более вспученной.

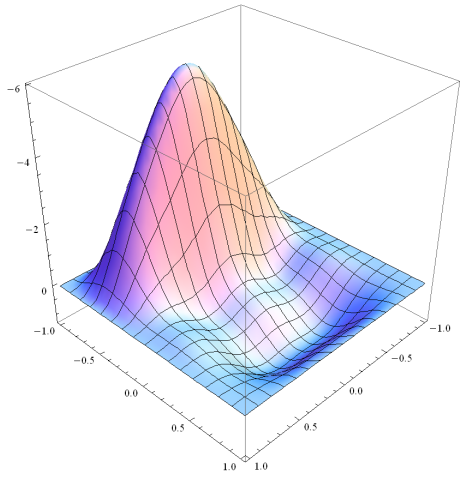


Рис. 5. Форма потери устойчивости квадратной однородной пластины (сталь), $U_0 = 106{,}39$

Fig. 5. Buckling form for the steel square plate, $U_0 = 106{,}39$

В табл. 3 представлена зависимость критической скорости потери устойчивости от безразмерной толщины h/b. В данной таблице для удобства представлен безразмерный параметр $\dfrac{U}{c_0} = \dfrac{U_0 \bar{D}_1}{\kappa p_0}$, что позволяет увидеть диапазон применимости результатов в рамках линейного приближения поршневой теории. Можно заметить, что значение критической скорости растет с увеличением толщины составной пластины.

Таблица 3

Зависимость критической скорости
от толщины квадратной составной пластины

Table 3

Dependence of critical velocity
from the thickness of square combined plate

Параметр	Значение					
h/b	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01
U/c_0	1,08	1,84	2,91	4,33	6,16	8,45

В качестве второго примера рассмотрим удлиненную составную пластину «сталь – алюминий» (сталь – $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $E = 1{,}9982 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}3$, алюминий – $\rho = 2{,}75 \cdot 10^3$ кг/м^3, $E = 0{,}7 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}34$), изображенную на рис. 6, асимметричную относительно начала координат. Заметим, что для данной пластины сходимость метода Бубнова – Галеркина также наблюдается при удержании в расчетах $N = 16$. На рис. 7 представлены формы потери устойчивости данной пластины при защемленных краях в двух случаях: первый – когда воздушный поток с параметрами $p_0 = 1{,}0126 \cdot 10^5$ Па, $\rho_0 = 1{,}2928$ кг/м^3, $\kappa = 1{,}4$ направлен вдоль большей стороны пластины, т.е. по оси Ox, и второй – когда воздушный поток перпендикулярен большей стороне, т.е. направлен по оси Oy.

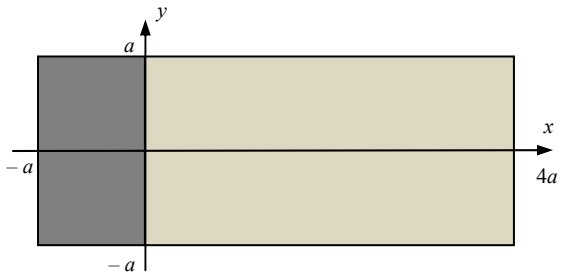
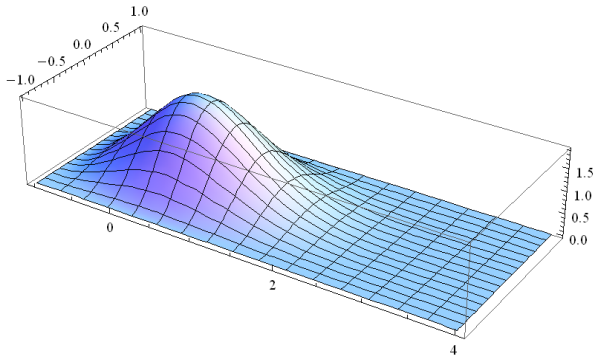


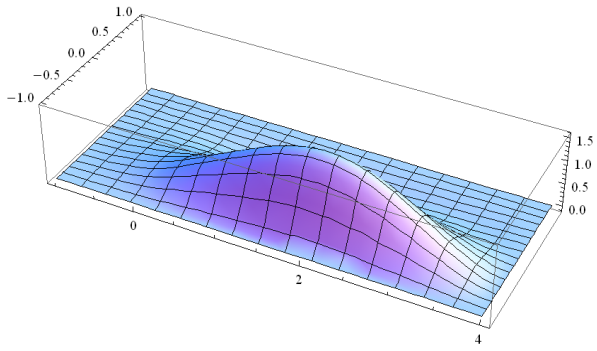
Рис. 6. Удлиненная составная пластина

Fig. 6. Long combined plate

В первом случае получаем значение параметра критической скорости $U_0 = 23{,}44$, во втором случае $U_0 = 67{,}08$. На рис. 7 представлены соответствующие формы потери устойчивости.



a



b

Рис. 7. Формы потери устойчивости составной удлиненной пластины сталь – алюминий: *a* – $U_0 = 23{,}44$; *b* – $U_0 = 67{,}08$

Fig. 7. Buckling forms for the long combined plate steel – aluminum: *a* – $U_0 = 23{,}44$; *b* – $U_0 = 67{,}08$

Опять вспучивание происходит в той части пластины, которая расположена против вектора потока. При этом более жесткая стальная вставка в левой части пластины приводит к тому, что эта часть оказывается менее вспученной: так, на рис. 7, *b*, этот факт иллюстрируется наиболее отчетливо, можно увидеть, что эта часть пластины имеет малые прогибы.

В табл. 4 представлена зависимость критической скорости потери устойчивости от безразмерной толщины *h*/*b* для удлиненной пластины, изображенной на рис. 6. Аналогично предыдущему случаю квадратной пластины можно увидеть, что с увеличением толщины критическая скорость быстро возрастает, оставаясь при этом меньше соответствующих значений для составной квадратной пластины.

Таблица 4

Зависимость критической скорости
от толщины удлиненной составной пластины

Table 4

Dependence of critical velocity
from the thickness of long combined plate

Параметр	Значение				
h/*b*	0,0065	0,007	0,008	0,009	0,01
U/c_0	1,16	1,44	2,15	3,04	4,17

Заключение

Таким образом, в статье на основе метода спектральной динамической жесткости впервые предлагается алгоритм исследования динамической устойчивости составных пластин в потоке газа. Представлены аналитические выражения для собственных форм составных пластин, позволяющие точно вычислить интегралы, присутствующие в рядах, используемых в методе Бубнова – Галеркина. Исследование сходимости метода указывает, что она обеспечивается при $N \geq 16$, требуется брать не менее четырех первых базисных функций в каждом из направлений симметрии. Сходимость метода и точность полученных результатов во многом зависят от точности построения собственных форм пластины в вакууме, которую обеспечивает метод спектральной динамической жесткости.

Результаты расчетов показывают следующие качественные зависимости:

- увеличение сторон пластины в направлении, перпендикулярном потоку, а также уменьшение жесткости пластины в данном направлении приводит к уменьшению критической скорости;

- формы потери устойчивости достаточно схожи для классических граничных условий (защемление, шарнирное опирание, свободный край), вспучивание происходит в той части пластины, которая расположена против вектора потока.

Представленный подход легко обобщается на случай произвольного направления вектора скорости относительно сторон пластины, наличия планарных сил в плоскости пластины и может служить основой для более детального анализа флаттера прямоугольника в зависимости от упругих свойств материала пластины. Заметим, что метод Бубнова – Галеркина часто используется для анализа в более сложных нелинейных моделях, например при дозвуковой или околозвуковой скорости потока. Представленный подход позволяет провести обобщение и для подобных задач.

Библиографический список

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1961. – 341 с.

2. Кийко И.А., Алгозин С.Д. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука, 2006. – 248 с.

3. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикл. математика и механика. – 1957. – Т. 20, вып. 2. – С. 221–222.

4. Dowell E.H. Aeroelasticity of Plates and Shells. – Springer Science+Business Media B.V. 1975. – 139 p.

5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

6. Goland M., Luke I.L. An exact solution for two-dimensional linear panel flutter at supersonic speeds // Journal Aeronautic Science. – 1954. – Vol. 21, no. 4. – P. 275–276.

7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче динамической устойчивости прямоугольной пластины в сверхзвуковом потоке газа // Доклады национальной академии наук Армении. – 2014. – Т. 114, № 3. – С. 213–221.

8. Olson M.D. Some Flutter Solutions Using Finite Element // AIAA Journal. – 1970. – Vol. 8(4). – P. 747–752.

9. Yang T., Han A.D. Flutter of thermally buckled finite element panels // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14(7). – P. 975–977.

10. Prakash T., Ganapathi M. Supersonic flutter characteristics of functionally graded at panels including thermal effects // Composite Structures. – 2006. – Vol. 72(1). – P. 10–18.

11. Librescu L., Marzocca P., Silva W.A. Supersonic/hypersonic flutter and post flutter of geometrically imperfect circular cylindrical panels // Journal Spacecraft Rockets. – 2002. – Vol. 39(5). – P. 802–812.

12. Singha M.K., Mandal M. Supersonic flutter characteristics of composite cylindrical panels // Composite Structures. – 2008. – Vol. 82. – P. 295–301.

13. Bismarck-Nasr M.N., Bones C.A. Damping effects in nonlinear panel flutter // AIAA Journal. – 2000. – Vol. 38. – P. 711–713.

14. Song Z.G., Li F.M. Aerothermoelastic analysis of nonlinear composite laminated panel with aerodynamic heating in hypersonic flow // Composites. – 2014. – Part B. – P. 56 830–839.

15. Analysis of Supersonic and Transonic Panel Flutter Using a Fluid-Structure Coupling Algorithm / G. Mei, J. Zhang, G. Xi, X. Sun, J. Chen // Journal Vibration and Acousic. - 2014. – Vol. 136(3). – 031013.

16. Анализ флаттерных характеристик на основе обобщенных параметров собственных тонов колебаний / К.И. Баринова, А.В. Долгополов О.А., Орлова, М.А. Пронин // Вест-

ник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. – С. 95–102.

17. Алгозин С.Д., Кийко И.А. Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. - Т. 44, № 4 – С. 35–44.

18. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер пластины переменной толщины // Известия МГТУ МАМИ. – 2012. – № 1 (13). – С. 249–255.

19. Валяев В.И. Об определении границы панельного флаттера вертикальной стенки топливного бака методом заданных форм // Ученые записки ЦАГИ. – 1983. – Т. XIV, № 5. – С. 114–118.

20. Beloiu D.M., Ibrahim R.A., Pettit C.L. Influence of boundary conditions relaxation on panel flutter with compressive in-plane load // Journal of Fluids and Structures. – 2005. – Vol. 21. - P. 743–767.

21. Chen J., La Q.S. Analysis of Flutter and Nonlinear Dynamics of a Composite Laminated Plate // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2016. – Vol. 16. – 1550019 (20 pages).

22. Папков С.О. Флаттер защемленной ортотропной прямоугольной пластины // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 4.- С. 361–374.

23. Wittrick W.H., Williams F.W. Buckling and vibration of anisotropic or isotropic plate assemblies under combined loadings // International Journal of Mechanical Sciences. – 1974. – Vol. 16(4). – P. 209–239.

24. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case / J.R. Banerjee, S.O. Papkov, X. Liu, D. Kennedy // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Vol. 342. – P. 177–199.

25. Langley R.S. A dynamic stiffness technique for the vibration analysis of stiffened shell structures // Journal of Sound and Vibration. - 1992. – Vol. 156(3). – P. 521–540.

26. Spectral dynamic stiffness theory for free vibration analysis of plate structures stiffened by beams with arbitrary cross-sections / X. Liu, Y. Li, Y. Lin, J.R. Banerjee // Thin-Walled Structures.- 2021. – Vol. 160. – P. 107391.

27. Папков С.О. Новые аналитические решения для задач колебания толстых пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 145–156.

28. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981. – 800 с.

29. Bismarck-Nasr M.N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells // Appl. Mech Rev. – 1992. – Vol. 42, no. 12, part 1. - P. 461–482.

30. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Численно – аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // Прикл. математика и механика. – 1997. – Т. 60, вып. 1. – С. 171–174.

References

1. Bolotin V.V. Nekonservativnyye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti [Non-conservative problems of the theory of elastic stability]. – M.: Gos. izd. fiz.- mat. literatury, 1961. – 341 s.

2. Kiyko I.A, Algozin S.D. Flatter plastin i obolochek [Flutter of [plates and shells]. – M.: Nauka, 2006. – 248 s.

3. Movchan A. A. O kolebaniyakh plastinki, dvizhushcheysya v gaze [Vibrations of a plate moving in a gas] // Prikl. matematika i mekhanika. 1957. T. 20, vyp. 2. S. 221–222.

4. Dowell, E. H. Aeroelasticity of Plates and Shells. – Springer Science+Business Media B.V. 1975. – 139 p.

5. Vol′mir A.S. Ustoychivost′ deformiruyemykh sistem [Stability of deformable systems]. – M.: Nauka, 1967. – 984 s.

6. Goland M., Luke I.L. An exact solution for two-dimensional linear panel flutter at supersonic speeds // Journal Aeronautic Science. – 1954. – Vol. 21, N 4. – P. 275-276.

7. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Ob odnoy zadache dinamicheskoy ustoychivosti pryamougol′noy plastiny v sverkhzvukovom potoke gaza [On one problem of dynamic stability of a rectangular plate in a supersonic gas flow] // Doklady natsional′noy akademii nauk Armenii. – 2014. T. 114, №3. S. 213 -221.

8. Olson, M. D. Some Flutter Solutions Using Finite Element // AIAA Journal. – 1970. – 8(4). – P. 747–752.

9. Yang T., Han A. D. Flutter of thermally buckled finite element panels // AIAA Journal. – 1976.- 14(7) – P. 975–977.

10. Prakash T., M. Ganapathi. Supersonic flutter characteristics of functionally graded at panels including thermal effects // Composite Structures. – 2006. – 72(1) – P. 10–18

11. Librescu L., Marzocca P., Silva W. A. Supersonic/hypersonic flutter and post flutter of geometrically imperfect circular cylindrical panels // Journal Spacecraft Rockets. – 2002. – 39(5) – P. 802–812.

12. Singha M. K., Mandal M. Supersonic flutter characteristics of composite cylindrical panels // Composite Structures. – 2008.- 82. – P. 295–301.

13. Bismarck-Nasr M. N., Bones C. A. Damping effects in nonlinear panel flutter // AIAA Journal. – 2000. – 38. – P. 711–713.

14. Song Z. G., Li F. M. Aerothermoelastic analysis of nonlinear composite laminated panel with aerodynamic heating in hypersonic flow // Composites. – 2014. – Part B. – P. 56 830–839.

15. Mei G., Zhang J., Xi G., Sun X., Chen J. Analysis of Supersonic and Transonic Panel Flutter Using a Fluid-Structure Coupling Algorithm // Journal Vibration and Acousic.- 2014. -136(3). – 031013.

16. Barinova K.I., Dolgopolov A.V., Orlova O.A., Pronin M.A. Theanalysis of flutter characteristics based on generalized parameters of eigen modes of vibrations // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2021. – no. 1. – P. 95-102.

17. Algozin S.D., Kiyko I. A. Chislennoye issledovaniye flattera pryamougol′noy plastiny [Numerical study of the flutter of a rectangular plate]// Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2003. T. 44, n◦4 S. 35-44.

18. Kudryavtsev B.YU. Flatter plastiny peremennoy tolshchiny [Flutter of a plate of variable thickness] // Izvestiya MGTU MAMI. – 2012. №1 (13). S. 249-255.

19. Valyayev V.I. Ob opredelenii granitsy panel′nogo flattera vertikal′noy stenki toplivnogo baka metodom zadannykh form [On the determination of the boundary of the panel flutter of the vertical wall of the fuel tank by the method of given forms] // Uchenyye zapiski TSAGI. 1983. T. XIV №5. S. 114-118.

20. Beloiu D.M., Ibrahim R.A., Pettit C.L. Influence of boundary conditions relaxation on panel flutter with compressive in-plane load // Journal of Fluids and Structures. – 2005. – 21.- P. 743–767.

21. Chen J., La Q.S. Analysis of Flutter and Nonlinear Dynamics of a Composite Laminated Plate // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2016. – Vol. 16 – 1550019 (20 pages).

22. Papkov S.O. Flatter zashchemlennoy ortotropnoy pryamougol′noy plastiny [Flutter of a clamped orthotropic rectangular plate]// Vychislitel′naya mekhanika sploshnykh sred. 2017. T.10, №4. S. 361-374.

23. Wittrick W H, Williams F W. Buckling and vibration of anisotropic or isotropic plate assemblies under combined loadings // International Journal of Mechanical Sciences. – 1974. – 16(4). – P. 209–239.

24. Banerjee J.R., Papkov S.O., Liu X., Kennedy D.. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – 342. – P. 177-199.

25. Langley R S. A dynamic stiffness technique for the vibration analysis of stiffened shell structures // Journal of Sound and Vibration.- 1992. – 156(3). – P. 521–540.

26. Liu X., Li Y., Lin Y., Banerjee J. R. Spectral dynamic stiffness theory for free vibration analysis of plate structures stiffened by beams with arbitrary cross-sections // Thin-Walled Structures.- 2021. – 160. – P. 107391.

27. Papkov S.O. New analytical solutions for vibration problem of thick plates // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – no. 4. – P. 145-156.

28. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integraly i ryady [Integrals and series], Moskow, Nauka, 1985, 800 p.

29. Bismarck-Nasr M.N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells // Appl. Mech Rev. – 1992. – vol. 42. no 12, part 1.- P. 461- 482.

30. Algazin S.D., Kiyko I.A. Chislenno – analiticheskoye issledovaniye flattera pla-stiny proizvol′noy formy v plane [Numerical – analytical study of the flutter of a plate of arbitrary shape in plan]// Prikl. matematika i mekhanika. 1997. T. 60, vyp. 1. S. 171 – 174.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00226, https://rscf.ru/project/22-21-00226.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-21-00226, https://rscf.ru/project/22-21-00226.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.