Каюмов, Р.А. Большие прогибы, потеря устойчивости и закритическое поведение пологих панелей и арок переменной толщины на упругом основании / Р.А. Каюмов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 2. – С. 33–41. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.04

Perm Polytech Style: Kayumov R.A. Large deflections, loss of stability and over-critical behavior of sloping panels and arches of variable thickness on an elastic base. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 2, pp. 33-41. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.04

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.04
УДК 539.3

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ, ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛОГИХ ПАНЕЛЕЙ И АРОК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Р.А. Каюмов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 31 мая 2023 г.
Одобрена: 05 ноября 2023 г.
Принята к публикации:
21 мая 2024 г.

Ключевые слова:

арка, потеря устойчивости, закритический изгиб, упругое основание, вариационный метод, численные эксперименты.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о больших прогибах пологой арки в своей плоскости (или бесконечно длинной панели), нагруженной поперечными нагрузками. Для ее решения применён вариационный подход. Разрешающие нелинейные уравнения сведены к отысканию прогиба и продольного усилия, которое считается постоянным по длине арки ввиду ее пологости. Предложен приближенный метод решения путем разложения перемещений в ряд Фурье. Особенностью использованного подхода является то, что для прохождения предельных точек не требуется применять специальные алгоритмы типа метода продолжения по параметру. Он позволяет также проследить процесс закритического деформирования арки. Предложенный подход позволяет рассматривать задачи для арок переменной толщины, находящихся на упругих опорах, на упругом основании с переменным коэффициентом постели, различными нагрузками. Поэтому он является удобным и в задачах об отыскании, например, оптимального распределения толщины при ограничениях на критическую нагрузку, на жесткость, на максимальные напряжения сжатия или растяжения.

Приведены результаты численных расчетов. Изучен вопрос о сходимости решения в зависимости от количества членов ряда, в который разлагается искомый прогиб. Выявлено хорошее согласование с известными аналитическими результатами, полученными ранее путем решения уравнений равновесия элемента арки и панели в случае простых видов нагружения. При этом даже в более сложных случаях нагружения и закритического изгиба арки без упругого основания результаты, полученные при удержании трех, четырех и пяти членов ряда Фурье, максимальные прогибы и критические нагрузки отличались не более чем на 2,5 %.

На основе численных экспериментов выявлены особенности поведения арки, вызванные перестройкой геометрии в процессе нагружения. Исследованы процессы потери устойчивости арки и её закритического поведения. Обнаружен эффект при симметричной деформации в случае кинематического нагружения, а именно выявлено, что при некотором значении сосредоточенной силы возможно бесконечное число форм равновесия. Рассмотрены арки на упругом основании, а также с переменной толщиной (результаты приведены в виде диаграмм «нагрузка – перемещение» и в виде картин деформированных форм арок). На основе численных экспериментов выявлен интересный эффект. Оказалось, что увеличение толщины при удалении от опор не меняет характера диаграммы «нагрузка – перемещение», т.е. при некоторой нагрузке происходит хлопок. Напротив, уменьшение толщины при удалении от опор приводит к выполаживанию диаграммы, а после некоторого значения толщины в центре дальнейшее ее уменьшение приводит к тому, что хлопка арки не происходит.

© **Каюмов Рашит Абдулхакович** – д. ф.-м. н., проф. кафедры механики, e-mail: kayumov@rambler.ru, kayumovra@yandex.ru, ID: 0000-0003-0711-9429

Rashit A. Kayumov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mechanics, e-mail: kayumov@rambler.ru, kayumovra@yandex.ru, ID: 0000-0003-0711-9429

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

LARGE DEFLECTIONS, LOSS OF STABILITY AND OVER-CRITICAL BEHAVIOR OF SLOPING PANELS AND ARCHES OF VARIABLE THICKNESS ON AN ELASTIC BASE

R.A. Kayumov

Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 31 May 2023
Approved: 05 November 2023
Accepted for publication:
21 May 2024

Keywords:

arch, loss of stability, supercritical bending, elastic base, variational method, numerical experiments.

ABSTRACT

The problem of large deflections of a flat arch in its plane (or an infinitely long panel) loaded with transverse loads is considered. A variational approach has been applied to solve it. The resolving nonlinear equations are reduced to finding the deflection and longitudinal force, which is considered constant along the length of the arch due to its flatness. An approximate solution method is proposed by decomposing the displacements into a Fourier series. The peculiarity of the approach used is that in order to pass the limit points, it is not necessary to use special algorithms such as the continuation method by parameter. It also allows you to trace the process of supercritical deformation of the arch. The proposed approach allows us to consider problems for arches of variable thickness, located on elastic supports, on an elastic base with a variable bed coefficient, various loads. Therefore, it is also convenient in problems of finding, for example, the optimal thickness distribution under restrictions on critical load, on rigiditystiffness, on maximum compression or tension stresses.

The results of numerical calculations are presented. The question of the convergence of the solution depending on the number of terms of the series into which the desired deflection decomposes is studied. A good agreement with the known analytical results obtained earlier by solving the equilibrium equations of the arch element and panel in the case of simple types of loading is revealed. At the same time, even in more complex cases of loading and supercritical bending of an arch without an elastic base, the results obtained when holding three, four and five members of the Fourier series, the maximum deflections and critical loads differed by no more than 2.5 %.

On the basis of numerical experiments, the features of the arch behavior caused by the rearrangement of geometry during loading are revealed. The processes of loss of stability of the arch and its supercritical behavior are investigated. The effect of symmetric deformation in the case of kinematic loading is found, namely, it is revealed that at a certain value of the concentrated force, an infinite number of equilibrium forms are possible. Arches on an elastic base, as well as with variable thickness are considered (the results are presented in the form of load–displacement diagrams and in the form of pictures of deformed arch shapes). An interesting effect has been revealed based on numerical experiments. It turned out that the increase in thickness when moving away from the supports does not change the nature of the load–displacement diagram, i.e., with some load, cotton occurs. On the contrary, a decrease in thickness when moving away from the supports leads to a flattening of the diagram, and after a certain thickness value in the center, its further decrease leads to the fact that the arch does not pop.

Введение

Задаче о закритическом поведении элементов конструкций, начиная с проблем устойчивости и анализа больших прогибов стержня при сжатии, решенных Л. Эйлером (см., например, в [1]), посвящалось большое количество работ, в том числе и задачам о больших прогибах стержней в упругой среде (см. например, [2–12]). Задача о больших прогибах пологих цилиндрических бесконечно длинных панелей была впервые исследована в работе [7]. После этого появился ряд публикаций, в которых эта задача исследовалась при других геометрических формах панелей, других условиях нагружения, а также в случае панелей, образованных из пластин предварительным сжатием. Был обнаружен эффект, который не наблюдался в [7], а именно было выявлено [8], что при некотором значении сосредоточенной силы при симметричной деформации возможно бесконечное число форм равновесия. В частности, для предварительно изогнутой пластины это достигается после прохождения нагрузкой ее максимальной величины и уменьшения её до нулевого значения.

Для задач о потере устойчивости конструкций на упругом основании было выявлено, что, в отличие от решения Эйлера, при определенных геометрических параметрах стержня после потери устойчивости для дальнейшей деформации стержня в упругой среде требуется уже меньшая сила, чем критическая [9; 10]. Фактически происходит хлопок, как это имеет место в большинстве случаев при поперечном нагружении арок или предварительно искривленных стержней.

В [11] представлено аналитическое исследование нелинейно упругого поведения после выпучивания пологих круглых арок, имеющих неодинаковые упругие вращательные торцевые ограничения. Для вывода дифференциальных уравнений равновесия используется принцип стационарности потенциальной энергии. Установлено, что арка с упругими концевыми заделками не может выгибаться в бифуркационном режиме.

В [12] представлено аналитическое исследование процесса обрушения шарнирно закрепленной неоднородной пологой круглой арки под действием равномерного радиального давления. Достоверность аналитического результата проверяется путем сравнения с результатами МКЭ.

В развитие [7, 8] в работах [13; 14] рассмотрены арки, изготовленные из линейно-упругого функционально-градиентного материала и подверженные воздействию сосредоточенной радиальной или вертикальной мертвой силы. Для описания поведения используются те же гипотезы, что и в [7; 8], а дифференциальные уравнения задачи выводятся из принципа виртуальной работы.

Вариационной постановке задачи устойчивости геометрически нелинейного деформирования тонкостенных конструкций посвящено немало работ. При этом обычно в задачах нелинейного деформирования стержней используется вариационное уравнение в виде принципа возможных перемещений, как это отмечается в [15] (см. также [10; 1–17]). В ней на примере плоской задачи показывается, что с использованием энергетически сопряженных векторов усилий и деформаций вариационную задачу можно сформулировать в виде задачи поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа. При этом появляется возможность двумя способами получить уравнения устойчивости: как уравнения в вариациях для исходной дифференциальной постановки, а также как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа. Рассмотрена плоская круговая двухшарнирная арка, нагруженная потенциальной «мертвой» нагрузкой, для статических задач получены точные нелинейные дифференциальные уравнения задачи. Доказана эквивалентность дифференциальной и вариационной постановок. Получены точные уравнения устойчивости, учитывающие геометрически нелинейное деформирование в докритическом состоянии.

Задачам о больших прогибах, а также закритическом поведении арок и в последние годы уделяется немало внимания. Например, в [16] рассматривается плоская круговая двухшарнирная арка, нагруженная потенциальной «мертвой» нагрузкой. Для описания напряженно-деформированного состояния и устойчивости равновесия используется геометрически точная теория, в соответствии с которой каждая точка стержня имеет две трансляционные степени свободы и одну вращательную, не зависящую от трансляционных. Для получения решения не используются никакие упрощения о величинах перемещений и углов поворота, а также учитываются все жесткости стержня – продольная, сдвиговая и изгибная. Получены точные нелинейные дифференциальные уравнения статической задачи. Сформулирована вариационная постановка в виде задачи поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа. Доказана эквивалентность дифференциальной и вариационной постановок. Получены точные уравнения устойчивости, учитывающие геометрически нелинейное деформирование в докритическом состоянии. На основе полученных уравнений решена задача устойчивости равновесия круговой арки при действии «мертвого» радиального давления с учетом всех жесткостей стержня. Получено характеристическое трансцендентное уравнение, а также асимптотическое решение этого уравнения в виде простых формул, пригодных для практического применения. Выполнено сравнение полученного решения, учитывающего все жесткости стержня, с классическим решением, учитывающим только изгибную жесткость.

Немало работ, посвященных практически важным задачам. Например, в [17] проводится расчет на устойчивость криволинейных стержневых элементов сплошностенчатых стальных арок по изгибно-крутильной форме, в [18] проводится анализ большепролетных арок (крыш велодромов) при разных условиях закрепления, в [19] исследуется устойчивость многослойных цилиндрических прямоугольных в плане панелей, выполненных из поперечно-клееной древесины. Продолжаются и теоретические исследования (например, в [20] выводятся непротиворечивые уравнения теории плоских криволинейных стержней при конечных перемещениях, а в [21] исследуются вопросы разрешимости уравнений в геометрически нелинейных краевых задачах для пологих оболочек по теории типа Тимошенко).

Рассматриваются и нестандартные условия закрепления, например, в [22; 23] исследуется нелинейное поведение и устойчивость пологих арок с упругими горизонтальными и вертикальными опорами. Аналогичное исследование в [24] сопровождается сравнением с экспериментальными результатами. В [25] также учитывается упругая податливость опор и представлено аналитическое исследование потери устойчивости многослойной арки. При этом обнаружено, что арка может терять устойчивость либо в режиме предельной точки, либо в режиме бифуркации (как это было отмечено ранее и в работе [8]), а ее поведение очень чувствительно к жесткости опоры. Проведено сравнение с результатами, полученными методом конечных элементов. Этому же направлению посвящена работа [26], в которой неустойчивость в плоскости пологой арки исследуется в зависимости от перемещений и поворотов опор. В [27] исследуется влияние формы сечения на потерю устойчивости как в плоскости, так и из плоскости арки. Аналогичное исследование, но численным методом, проведено в [28]. В [29; 30] аналитически решаются задачи с учетом нелинейно упругой податливости опор повороту оси. В [31] приведены экспериментальные и аналитические результаты, но уже с учетом упругопластических, а в [32] – аналитические решения с учетом вязкоупругих деформаций.

Ниже также рассматривается пологая панель или арка (рис. 1), которая может иметь упругое основание, упругие опоры, совокупность различных нагрузок. В этом случае использование уравнений равновесия приводит к трудностям, поскольку нелегко найти их точные решения на каждом участке и сшивать их. В таких случаях целесообразнее использовать вариационные методы. Они удобны и в оптимизационных задачах, поэтому задачи разработки простых методов их решения остаются актуальными.

1. Постановка задачи и метод её решения

Рассмотрим пологую панель длины L (см. рис. 1), которая может иметь переменную цилиндрическую жесткость, упругие опоры и упругое основание, которое также может иметь переменный коэффициент постели. При цилиндрическом изгибе панели задача становится одномерной и совпадает с точностью до обозначений с задачей об арке, а отличие заключается лишь в том, что вместо цилиндрической жесткости $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ необходимо использовать изгибную жесткость EJ, а в качестве жесткости на растяжение $K = Eh/(1-\nu^2)$ необходимо использовать EA, давление на поверхность панели надо заменить распределенной по линии нагрузкой q.

В рассматриваемой задаче использование уравнения равновесия элемента панели приводит к трудностям, поскольку в общем случае найти его точное решение на каждом участке (как это делалось в [7; 8] при простых видах нагружения и простых формах панели) не представляется возможным. Трудности увеличиваются и в том случае, когда нагрузка представляет собой совокупность, например, сосредоточенных сил, кусочно-переменных распределенных нагрузок, поскольку приходится сшивать решения, полученные на участках с однородными нагрузками. В таких случаях предпочтительнее использовать энергетический метод решения задач, который будет изложен ниже.

В качестве примера рассмотрим панель, загруженную так, как это показано на рис.1. Принимаем, что материал упругий. Тогда в случае пологой панели можно принять закон Гука в виде:

$$M(x) = D(x)\cdot w(x)'', \tag{1}$$

здесь $M(x)$ – погонный изгибающий момент, $D(x)$ – цилиндрическая жесткость, $w(x)$ – прогиб, штрихами обозначены производные по координате x.

Закон Гука для N представим в виде:

$$N = -K(x)\cdot\varepsilon(x), \tag{2}$$

здесь $K(x)$ – жесткость на сжатие или растяжение.

Считаем, что панель лежит на упругом основании, а его реакция $r(x)$ связана с прогибом w законом Винклера:

$$r(x) = -k(x)\cdot w(x), \tag{3}$$

здесь $k(x)$ – коэффициент постели. Упругая опора на расстоянии x_3 (см. рис. 1) имеет жесткость c и связана с прогибом w соотношением

$$R = -c\cdot w(x_3). \tag{4}$$

Как и в работах [7; 8], можно считать, что погонная продольная сила N постоянна по длине (т.е. не зависит от x).

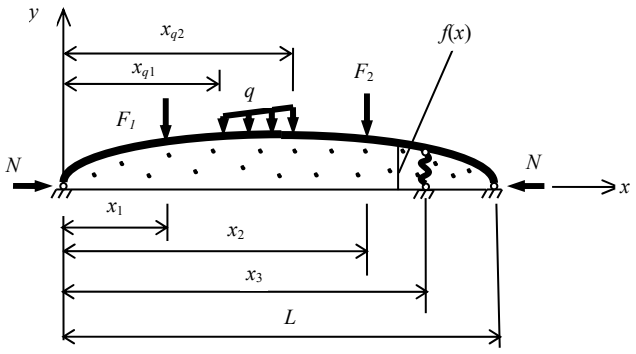


Рис. 1. Схема нагружения панели или арки

Fig. 1. Loading diagram of the panel or arch

Разрешающее энергетическое соотношение запишем в виде:

$$\int_0^L D(x)\cdot w''\cdot\delta w''\cdot dx - N\int_0^L (f+w)'\cdot\delta w'\cdot dx + \\ + \int_0^L k(x)\cdot w\cdot\delta w\cdot dx + \sum_i F_i\cdot\delta w(x_i) + \\ + \int_{x_{q1}}^{x_{q2}} q(x)\cdot\delta w\cdot dx + R\cdot\delta w(x_3) = 0, \tag{5}$$

здесь δw – виртуальный прогиб, первое и второе слагаемые – работы изгибающих моментов и продольной силы, третье слагаемое – работа реактивной силы r упругого основания, два последних слагаемых – работы внешних сил, четвертое – работа реактивной силы R.

Для решения задачи об определении функции $w(x)$ можно ее представить в виде ряда по некоторым функциям, удовлетворяющим условиям закрепления на опорах:

$$w = \sum_{i=1}^{n} A_i\varphi_i(x). \tag{6}$$

В качестве δw_i примем эти же функции:

$$\delta w_i = \varphi_i(x).$$

После подстановки (6) в (5), задав разные δw_i, получим линейную систему уравнений для коэффициентов A_i, которые будут представлять собой функции неизвестного пока усилия N.

Для того чтобы связать N и прогиб w, рассмотрим соотношение для ε, записанное с учетом немалых прогибов в виде:

$$\varepsilon = u' - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}(w')^2. \tag{7}$$

Здесь u – перемещение в направлении оси x, R – радиус кривизны панели. Подставляя (7) в закон Гука (2), получим

$$\frac{N}{K} = u' - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}(w')^2 . \quad (8)$$

Интегрируя (8), найдем выражение для u:

$$u = \frac{N}{K}x + \int_0^x \frac{w}{R}dx - \frac{1}{2}\int_0^x (w')^2 dx + C . \quad (9)$$

Из условия закрепления на левой опоре вытекает, что

$$C = 0 .$$

Для получения уравнения относительно усилия N нужно записать условие закрепления на правом краю панели в виде:

$$u(L) = 0 . \quad (10)$$

Соотношение (10) является нелинейным уравнением относительно N, которое потребовало бы разработки специальных методов его решения. Поэтому ранее в [7] был предложен другой путь для отыскания связи между N и внешней нагрузкой (в [7] был рассмотрен только вариант равномерно распределенной нагрузки q). Следуя этому подходу, и здесь можно принять, что внешние воздействия меняются пропорционально некоторому параметру нагружения t, а именно:

$$F_i = F_{i0} \cdot t, \quad q = q_0 \cdot t . \quad (11)$$

Тогда с учетом (9) и (5) соотношение (10) при заданном N будет представлять собой квадратное уравнение относительно t. Задавая различные значения для усилия N, можно из (10) выразить корни t через N, а значит, и величины нагрузок по соотношению (11). Таким образом, получим t как функцию параметра N. Подставляя N и t в систему уравнений, полученную из (5) при разных δw_i, и решая ее, найдем искомые A_i. Тогда становятся известными выражения для прогиба (6).

2. Численные эксперименты

Ниже приведены результаты численных экспериментов в случае использования некоторых конкретных геометрических и механических характеристик. Анализировались зависимости между различными параметрами напряженно-деформированного состояния. В качестве первого тестового примера рассмотрим простую задачу о потере устойчивости арки с первоначально постоянной кривизной под действием равномерно распределенной нагрузки q. Решение такой задачи, как следует, например, из работы [2], может быть сведено к расчету критической нагрузки для кольца. Оно записано в виде [2]:

$$q_{кр} = \frac{EJ}{R^3}\left(\frac{4\pi^2 R^2}{L^2} - 1\right). \quad (12)$$

Здесь E – модуль Юнга, R – радиус кривизны арки.

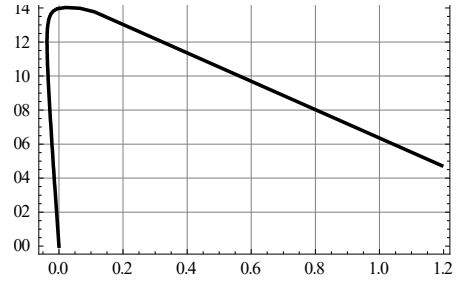
В качестве $\varphi_i(x)$, входящих в ряд (5), в этом случае удобно использовать тригонометрические функции вида

$$\varphi_i(x) = \sin(i\pi x / L) . \quad (13)$$

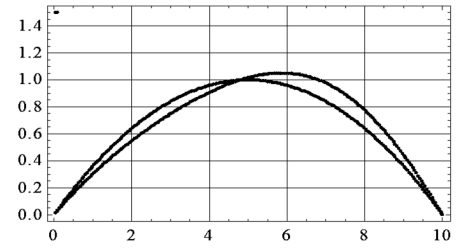
Они удовлетворяют не только кинематическим условиям шарнирного закрепления, но и статическим, а именно изгибающие моменты на торцах арки будут также равны нулю.

Были исследованы арки различной геометрии с различным числом членов ряда в (5). Оказалось, что результаты, полученные при удержании даже двух (5), отличаются менее чем на 4,8 % от результатов, полученных при большем количестве членов ряда. Таким образом, в этой задаче достаточно ограничиваться двумя первыми функциями (13).

Для расчетов были приняты следующие исходные данные: L=10 м, R=12,5 м, EJ= 0,45 МН м^2. Тогда формула (12) дает значение $q_{кр} = 0{,}1398$ МН/м. С этим результатом хорошо согласуется полученная по приведенной выше методике и приведенная на рис. 2, *a*, зависимость $q = q(w_1)$, где w_1 – это прогиб на расстоянии 0,5 L от левой опоры.



a



b

Рис. 2. Зависимость $q = q(w_1),\ w_1 = w(0{,}5L)$ (*a*); формы арки до загрузки и после потери устойчивости (*b*)

Fig. 2. Dependence $q = q(w_1),\ w_1 = w(0.5L)$ (*a*); arch shapes before loading and after loss of stability (*b*)

Далее была рассмотрена задача о нагружении арки сосредоточенной силой F_1, приложенной в некоторой точке x_1 (см. рис. 1). Такая задача исследовалась в [8] на основе анализа нелинейного дифференциального уравнения равновесия четвертого порядка. Полученные решения слева и справа от точки приложения силы стыковались в [8] путем удовлетворения в этой точке

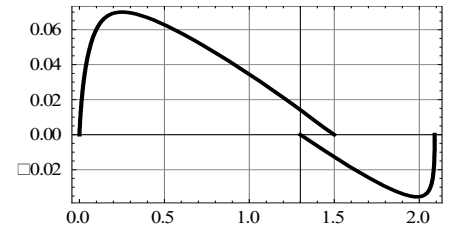
статических и кинематических условий. Была получена также и приближенная формула для критической силы в случае центрально приложенной силы. Она имеет следующий вид:

$$F_{\text{кр}} = \frac{f_0 D}{\sqrt{3}b^2}. \qquad (14)$$

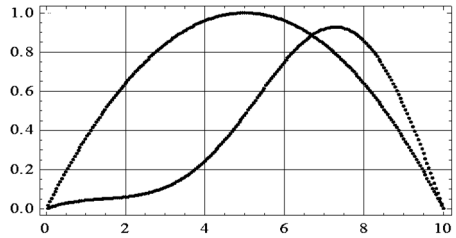
Для этого случая нагружения здесь была рассмотрена задача для панели с теми же исходными данными, что и в первом тестовом примере. Но при этом при вычислении D коэффициент Пуассона принимался равным нулю. Из (14) вытекает следующее значение для критической силы

$$F_{\text{кр}} = 0,0644 \text{ МН}.$$

Ниже приведены результаты, полученные численно по приведенной выше методике. Расчеты дают значение $F_{\text{кр}} = 0,06998$ МН, отличающееся от полученного по формуле (14) на 7,9 %. Здесь также были исследованы арки различной геометрии с различным числом членов ряда в (5). Оказалось, что здесь необходимо не менее трех членов ряда. Тогда результаты, полученные при удержании трех, четырех и пяти членов ряда (5), отличаются не более чем на 2,5 %. Таким образом, в этой задаче достаточно ограничиваться тремя первыми функциями (13).



a



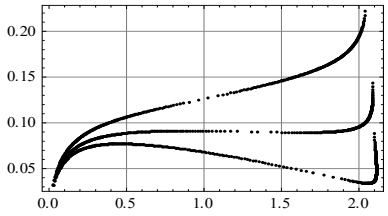
b

Рис. 3. Зависимость $F = F(w_1),\ w_1 = w(0,5L)$ (*a*); формы арки до загрузки (*b*) и после потери устойчивости

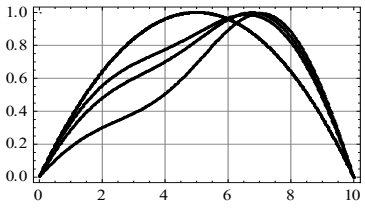
Fig. 3. Dependence $F = F(w_1),\ w_1 = w(0.5L)$ (*a*); arch shapes before loading and after loss of stability (*b*)

Здесь наблюдается эффект, который не обнаруживался в [7] при равномерной нагрузке, но имеет место при воздействии сосредоточенной силы. А именно, как видно из рис. 3, при кинематическом нагружении (когда сила F является фактически реакцией) после прохождения верхней критической нагрузки, равной $F_{cr} = 0,06998$ МН, в арке достигается состояние нейтрального равновесия, при котором $F = 0$. При этом становится возможным существование бесконечного числа форм равновесия. В этом состоянии продольная сила достигает максимально возможной величины $N = 0,1772$ МН. При дальнейшей деформации арка выворачивается, а силу F требуется уже направлять не вниз, а вверх (т.е. придерживать арку).

Далее были рассмотрены задачи о деформации арок на упругом основании. Результаты расчета с разными k приведены на рис. 4. Особенностью этих задач является то, что в случае сосредоточенной нагрузки при больших коэффициентах постели k для сходимости решения требуется уже большее число слагаемых в ряду (5), чем в предыдущем случае. Еще одной особенностью таких задач является то, что при немалых k уже не происходит потери устойчивости (т.е. нет предельной точки, как на рис. 2 или на рис. 3). Однако возможна ситуация, когда на диаграмме $F = F(w_1)$ появляется почти горизонтальный участок. Такая диаграмма напоминает зависимость сжимающей силы от осевого перемещения в задаче о закритическом изгибе прямого стержня (см. задачу об эластике Эйлера, например, в [1]). Третьей особенностью является то, что в рассмотренных задачах даже при малых k не обнаружено эффекта, отмеченного выше для свободно опертой арки, когда становится возможным существование бесконечного числа форм равновесия.



a

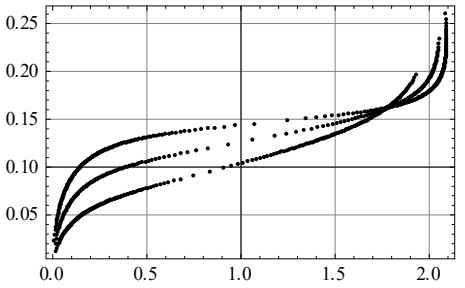


b

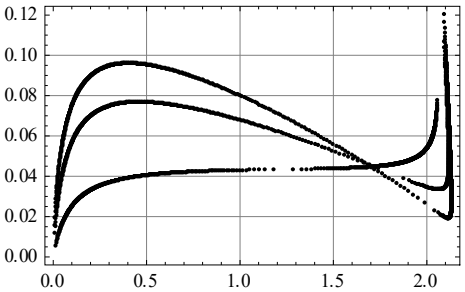
Рис. 4. Зависимость $F = F(w_1),\ w_1 = w(0,5L)$ при $k = 0,0072$ МН/м^2 (нижняя кривая); при k = 0,0177 МН/м^2 (средняя кривая); при $k = 0,0256$ МН/м^2 (верхняя кривая) (*a*); формы арки до загрузки, а также при одной и той же нагрузке $F = F_0$, которая равна критической в случае $k = 0,0072$ МН/м^2(нижняя кривая); вторая и третья снизу кривые – формы арки при $F = F_0$ в случаях $k = 0,0129$ МН/м^2 и $k = 0,022$ МН/м^2 соответственно (*b*)

Fig. 4. Dependence at k = 0.0072 MN/m^2 (lower curve); at k = = 0.0177 MN/m^2 (middle curve); at $k = 0.0256$ MN/m^2 (upper curve) (*a*); the shape of the arch before loading, as well as at the same load, which is critical in the case of $k = 0.0072$ MN/m^2 (lower curve); the second and third curves from below are the shape of the arch in the cases of $k = 0.0129$ MN/m^2 and $k = 0.022$ MN/m^2, respectively (*b*)

Далее были рассмотрены задачи о деформации арок на упругом основании с разными коэффициентами постели k под действием центрально приложенной нагрузки F, а также арок переменной толщины на упругом основании при k = 0,0072МН/м^2. На рис. 5, *a*, приведены результаты расчета с различными k, а на рис. 5, *b* – для разных законов изменения толщины по длине арки. Как и ожидалось, увеличение k ведет к повышению жесткости арки (см. рис. 5, *a*). А анализ решений при разных законах изменения толщины арки приводит к не совсем предсказуемому результату.



a



b

Рис. 5. Зависимость $F = F(w_1)$, $w_1 = w(0,5L)$ при k = 0,0072 МН/м^2 (нижняя кривая); при k = 0,0177 МН/м^2 (средняя кривая); при k = 0,0256 МН/м^2 (верхняя кривая) (*a*); зависимость $F = F(w_1)$ при k = 0,0072 МН/м^2; для нижней кривой отношение изгибной жесткости в центре арки к изгибной жесткости на опорах равно 0,3; для средней кривой равно 1; для верхней кривой равно 1,4 (*b*)

Fig. 5. Dependence $F = F(w_1)$, $w_1 = w(0.5L)$ at k = 0.0072 MN/m^2 (lower curve); at k = 0.0177 MN/m^2 (middle curve); at k = 0.0256 MN/m^2 (upper curve) (*a*); dependence $F = F(w_1)$ at k = 0.0072 MN/m^2; for the lower curve, the ratio of the bending stiffness in the center of the archto the bending stiffness on the supports is 0.3; for the middle curve, it is 1; for the upper curve, it is 1.4 (*b*)

Для изгибной жесткости был принят следующий закон ее изменения по длине арки:

$$EJ = (1+\alpha)\sin(\pi x / L)\cdot EJ(0). \qquad (15)$$

При $\alpha > 0$ наибольшая толщина будет в среднем сечении арки, а при $\alpha < 0$ – на опорах.

На основе численных экспериментов был выявлен интересный эффект. Оказалось, что при заданном коэффициенте постели k = 0,0072МН/м^2 (в этом случае имеется предельная нагрузка F_{cr}) увеличение толщины при удалении от опор не меняет характера диаграммы «нагрузка – перемещение», т.е. при некоторой нагрузке F_{cr} происходит хлопок. Напротив, уменьшение толщины при удалении от опор приводит к выполаживанию диаграммы, а после некоторого значения толщины в центре дальнейшее ее уменьшение приводит к тому, что хлопка арки не происходит. Это можно видеть из рис. 5, *b*).

Заключение

В данной работе в геометрически нелинейной постановке рассмотрена задача о больших прогибах (в том числе о потере устойчивости и закритическом изгибе) пологих панелей и арок, загруженных различными поперечными нагрузками при наличии усложняющих факторов – переменных жесткостей, упругого основания, разного типа нагрузок и опор. Рассмотрен вариационный метод решения задачи.

Особенностью изложенного подхода является то, что для прохождения предельных точек не требуется применять специальные алгоритмы типа метода продолжения по параметру. Он позволяет также проследить процесс закритического деформирования арки. На основе численных экспериментов выявлена быстрая сходимость решения при увеличении числа членов ряда для аппроксимации прогиба. Обнаружен эффект, который имеет место при воздействии сосредоточенной силы, но не наблюдается при равномерной нагрузке. А именно при кинематическом нагружении после прохождения верхней критической нагрузки в арке достигается состояние нейтрального равновесия, при котором сила равна нулю, и при этом становится возможным существование бесконечного числа форм равновесия. Выявлено также, что при небольшом коэффициенте постели k увеличение толщины при удалении от опор не меняет характера диаграммы «нагрузка – перемещение» и происходит хлопок. Напротив, уменьшение толщины при удалении от опор приводит к выполаживанию диаграммы, а после некоторого значения толщины в центре дальнейшее ее уменьшение приводит к тому, что хлопка арки не происходит.

Библиографический список

1. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

2. Вольмир, А.С. Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. – М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.

3. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.

4. Григолюк, Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 359 с.

5. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 808 с.

6. Динник, А.Н. Устойчивость арок / А.Н. Динник. – М.: Гостехтеориздат, 1946. – 128 с.

7. Корнишин, М.С. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления / М.С. Корнишин, Х.М. Муштари // Известия Казанского филиала Академии наук СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук. – 1955. – № 7. – С. 36–50.

8. Каюмов, Р.А. Устойчивость изогнутой тонкой упругой пластины, нагруженной поперечной силой / Р.А. Каюмов, Б.Ф. Тазюков // Известия вузов. Авиационная техника. – 2001. – № 4. – С. 12–15.

9. Астапов, Н.С. Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании / Н.С. Астапов, В.М. Корнев // Прикладная механика и техническая физика. – 1994. – Т. 35, № 2. – С. 130–142.

10. Каюмов, Р.А. Закритическое поведение сжатых стержней в упругой среде / Р.А. Каюмов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2017. – № 5. – С. 122–129. DOI: 10.3103/S0025654417050120

11. Pi, Y.L. Non-linear buckling and postbuckling analysis of arches with unequal rotational end restraints under a central concentrated load / Y.L. Pi, M.A. Bradford // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – No. 26(49). – P. 3762–3773.

12. Sun-ting, Yan. On collapse of non-uniform shallow arch under uniform radial pressure / Yan Sun-ting, Shen Xiao-li, Jin Zhijiang // Engineering Structures. – 2018. – No. 160. – P. 419–438. DOI: org/10.1016/j.engstruct.2018.01.027

13. Bateni, M. Non-linear in-plane stability analysis of FGM circular shallow arches under central concentrated force / M. Bateni, M.R. Eslami // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2014. – No. 60. – P. 58–69. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.001

14. László, Kiss. Stability of fixed-fixed shallow arches under arbitrary radial and vertical forces / Kiss László // Magazine of Civil Engineering. – 2020. – No. 95(3). – P. 31–41. DOI: 10.18720/MCE.95.3

15. Лалин, В.В. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней / В.В. Лалин, Л.А. Розин, Д.А. Кушова // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 1. – С. 87–96.

16. Lalin, V.V. Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches / V.V. Lalin, A.N. Dmitriev, S.F. Diakov // Magazine of Civil Engineering. – 2019. – No. 5 (89). – P. 39-51. DOI: 10.18720/MCE.89.4

17. Белый, Г.И. К расчету на устойчивость криволинейных стержневых элементов сплошностенчатых стальных арок по изгибно-крутильной форме / Г.И. Белый, Д.В. Уразгильдеев // Вестник гражданских инженеров. – 2018. – № 2 (67). – С. 54–59.

18. Behaviour of load-carrying members of velodromes' long-span steel roof / J. Gusevs, D. Serdjuks, G.I. Artebjakina, E.A. Afanasjeva, V. Goremikins // Magazine of Civil Engineering. – 2016. – No. 65(5). – P. 3–16. DOI: 10.5862/MCE.65.1. 45

19. Каменев, И.В. Устойчивость цилиндрических CLT-панелей / И.В. Каменев, В.В. Карпов, Л.Н. Кондратьева // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 6 (95). – С. 30–38. DOI: 10.23968/1999-5571-2022-19-6-30-38

20. Паймушин, В.Н. Непротиворечивые уравнения теории плоских криволинейных стержней при конечных перемещениях и линеаризованные задачи устойчивости / В.Н. Паймушин, Н.В. Полякова // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, № 2. – С. 303–324.

21. Тимергалиев, С.Н. Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями / С.Н. Тимергалиев // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 4. – С. 59–75.

22. Nonlinear buckling analysis of shallow arches with elastic horizontal supports / Q. Han, Y. Cheng, Y. Lu, T. Li, P. Lu // Thin-Walled Structures. – 2016. – No. 109. – P. 88–102. DOI: 10.1016/j.tws.2016.09.016

23. Zhou, Y. Nonlinear Buckling and Post-buckling of Shallow Arches with Vertical Elastic Supports / Y. Zhou, Z. Yi, I. Stanciulescu // Journal of Applied Mechanics. – 2019. – No. 6(86). – P. 1–16. DOI: 10.1115/1.4042572

24. Lu, Y. Experimental investigation into the in-plane buckling and ultimate resistance of circular steel arches with elastic horizontal and rotational end restraints / Y. Lu, Y. Cheng, Q. Han // Thin-Walled Structures. – 2017. – No. 118. – P. 164–180. DOI: 10.1016/j.tws.2017.05.010

25. A theoretical study on nonlinear in-plane buckling of shallow angle-ply laminated arches with elastic supports / Zixiang Zhang, Airong Liu, Jiyang Fu, Jie Yang, Yuanyuan Liu, Yonghui Huang // Composite Structures. – 2021. – Vol. 269. – P. 114009.

26. Effects of movement and rotation of supports on nonlinear instability of fixed shallow arches / Hanwen Lu, Lulu Liu, Airong Liu, Yong-Lin Pi, Mark Andrew Bradford, Yonghui Huang // Thin-Walled Structures. – 2020. – Vol. 155. – P. 106909. DOI: org/10.1016/j.tws.2020.106909

27. Nonlinear buckling analysis of shallow arches with elastic horizontal supports / Qinghua Han, Yuhao Cheng, Yan Lu, Tao Li, Peng Lu // Thin-Walled Structures. – 2016. – Vol. 109. – P. 88–102. DOI: org/10.1016/j.tws.2016.09.016

28. Machacek, J. Buckling lengths of steel circular arches respecting non-uniform arch axial forces / J. Machacek // Thin-Walled Structures. – 2022. – Vol. 180. – P. 109916. DOI: org/10.1016/j.tws.2022.109916

29. Каюмов, Р.А. Закритическое поведение сжатых стержней с нелинейно упругими опорами / Р.А. Каюмов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 23–31. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.03

30. Продольный изгиб сжатого упругого стержня с одинаковыми нелинейными поворотными закреплениями на концах с учётом начальной кривизны / Л.И. Хайдаров, Р.А. Каюмов, Г.Н. Шмелев, А.Р. Гимазетдинов // Известия КГАСУ. – 2022. – № 3 (61). – С. 23–35. DOI: 10.52409/20731523_2022_3_23

31. Salih, Can Rakici Out-of-plane buckling strength of free standing singly symmetric hollow pinned circular arches / Can Rakici Salih, Menkulasi Fatmir // Journal of Constructional Steel Research. – 2021. – Vol. 186. – P. 106914. DOI: org/10.1016/j.jcsr.2021.106914

32. Большие прогибы вязкоупругих панелей / Р.А. Каюмов, Б.Ф. Тазюков, И.З. Мухамедова, Ф.Р. Шакирзянов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2019. – № 11. – С. 80–86.

References

1. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of a Deformable Solid Body]. Moscow, Nauka, 1988, 712 p.

2. Volmir A.S. Ustoichivost' uprugikh sistem [Stability of elastic systems]. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 880 p.

3. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustoichivost' uprugikh sistem [Fundamentals of Calculating the Stability of Elastic Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 312 p.

4. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. Ustoichivost' obolochek [Shell Stability]. Moscow, Nauka, 1978, 359 p.

5. Timoshenko S.P. Ustoichivost' sterzhnei, plastin i obolochek [Stability of rods, plates and shells]. Moscow, Nauka, 1971, 808 p.

6. Dinnik A.N., Ustojchivost' arok. [Stability of arches] M.: Gostehteorizdat, 1946. 128 p.

7. Kornishin M. S., Mushtari H. M. Ustojchivost' beskonechno dlinnoj pologoj cilindricheskoj paneli pod dejstviem normal'nogo ravnomernogo davlenija [Stability of an infinitely long flat cylindrical panel under the action of normal uniform pressure]. Izvestija Kazanskogo filiala Akademii nauk SSSR. Serija fiz.-mat. i tehn. Nauk, 1955, no.7, pp.36-50.

8. Kajumov R. A., Tazjukov B. F. Ustojchivost' izognutoj tonkoj uprugoj plastiny, nagruzhennoj poperechnoj siloj [Stability of a curved thin elastic plate loaded with a transverse force]. Izvestija VUZov. Aviacionnaja tehnika, 2001, no.4, pp.12-15.

9. Astapov N.S., Kornev V.M. Zakriticheskoe povedenie ideal'nogo sterzhnja na uprugom osnovanii [The supercritical behavior of an ideal rod on an elastic base]. Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika. 1994. vol.35, no.2, pp.130-142.

10. Kajumov R.A. Zakriticheskoe povedenie szhatyh sterzhnej v uprugoj srede [Supercritical behavior of compressed rods in an elastic medium]. Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela. 2017, no.5, pp.122-129. doi: 10.3103/S0025654417050120

11. Pi Y.L., Bradford M.A. Non-linear buckling and postbuckling analysis of arches with unequal rotational end restraints under a central concentrated load. International Journal of Solids and Structures, 2012, vol.26(49), pp.3762-3773.

12. Sun-ting Yan, Xiao-li Shen, Zhi-jiang Jin. On collapse of non-uniform shallow arch under uniform radial pressure. Engineering Structures, 2018, vol.160, pp.419-438 . doi: org/10.1016/j.engstruct.2018.01.027

13. Bateni, M., Eslami, M.R. Non-linear in-plane stability analysis of FGM circular shallow arches under central concentrated force. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, no.60, pp.58–69. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.001.

14. László Kiss. Stability of fixed-fixed shallow arches under arbitrary radial and vertical forces, Magazine of Civil Engineering, June 2020, no.95(3), pp.31-41. doi: 10.18720/MCE.95.3

15. LalinV.V., RozinL.A., KushovaD.A. Variacionnaja postanovka ploskoj zadachi geometricheski nelinejnogo deformirovanija I ustojchivosti uprugihsterzhnej [Variational formulation of the plane problem of geometrically nonlinear deformation and stability of elastic rods]. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal, 2013, no.1, pp.87-96.

16. Lalin V.V., Dmitriev A.N., D'jakov S.F. Geometricheski nelinejnoe deformirovanie i ustojchivost' uprugih arok [Geometrically nonlinear deformation and stability of elastic arches]. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal, 2019, no.5(89), pp.39–51. doi: 10.18720/MCE.89.4

17. Belyj G.I., Urazgil'deev D.V. K raschetu na ustojchivost' krivolinejnyh sterzhnevyh jelementov sploshnostenchatyh stal'nyh arok po izgibno-krutil'noj forme [To calculate the stability of curved rod elements of solid-walled steel arches in a bending-torsional shape], Vestnik grazhdanskih inzhenerov, 2018, no.2 (67), pp.54-59.

18. Gusevs, J., Serdjuks, D., Artebjakina, G.I, Afanasjeva, E.A., Goremikins, V. Behaviour of load-carrying members of velodromes' longspan steel roof. Magazine of Civil Engineering, 2016, no.65(5), pp.3-16. doi: 10.5862/MCE.65.1. 45.

19. Kamenev I.V., Karpov V.V., Kondrat'eva L.N. Ustojchivost' cilindricheskih CLT-panelej [Stability of cylindrical CLT panels]. Vestnik grazhdanskih inzhenerov, 2022, no.6 (95), pp.30-38. doi: 10.23968/1999-5571-2022-19-6-30-38

20. Paimushin, V.N., Polyakova, N.V. The consistent equations of the theory of plane curvilinear rods for finite displacements and linearized problems of stability. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2009, no.73(2), pp.220–236. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.04.012.

21. Timergaliev S.N. Metod integral'nyh uravnenij v nelinejnyh kraevyh zadachah dlja pologih obolochek tipa Timoshenko so svobodnymi krajami [Method of integral equations in nonlinear boundary value problems for Timoshenko-type flat shells with free edges]. Izvestija VUZov. Matematika, 2017, no.4, pp.59-75.

22. Han Q., Cheng Y., Lu Y., Li T., Lu P. Nonlinear buckling analysis of shallow arches with elastic horizontal supports. Thin-Walled Structures, 2016, no.109, pp.88–102. doi: 10.1016/j.tws.2016.09.01623.

23. Zhou Y., Yi Z., Stanciulescu I. Nonlinear Buckling and Post-buckling of Shallow Arches with Vertical Elastic Supports. Journal of Applied Mechanics, 2019, no.6(86), pp.1–16. doi: 10.1115/1.4042572

24. Lu Y., Cheng Y., Han Q. Experimental investigation into the in-plane buckling and ultimate resistance of circular steel arches with elastic horizontal and rotational end restraints. Thin-Walled Structures, 2017, no.118, pp.164–180. doi: 10.1016/j.tws.2017.05.010.

25. Zixiang Zhang, Airong Liu, Jiyang Fu, Jie Yang, Yuanyuan Liu, Yonghui Huang, A theoretical study on nonlinear in-plane buckling of shallow angle-ply laminated arches with elastic supports. Composite Structures, 2021, vol.269, 114009, ISSN 0263-8223.

26. Hanwen Lu, Lulu Liu, Airong Liu, Yong-Lin Pi, Mark Andrew Bradford, Yonghui Huang, Effects of movement and rotation of supports on nonlinear instability of fixed shallow arches. Thin-Walled Structures, vol.155, 106909, ISSN 0263-8231. doi: org/10.1016/j.tws.2020.106909.

27. Qinghua Han, Yuhao Cheng, Yan Lu, Tao Li, Peng Lu, Nonlinear buckling analysis of shallow arches with elastic horizontal supports. Thin-Walled Structures, 2016, vol.109, pp.88-102, ISSN 0263-8231. doi: org/10.1016/j.tws.2016.09.016.

28. Josef Machacek, Buckling lengths of steel circular arches respecting non-uniform arch axial forces. Thin-Walled Structures, 2022, vol.180, 109916, ISSN 0263-8231. doi: org/10.1016/j.tws.2022.109916.

29. Kayumov R.A. Postbuckling behavior of compressed bars with nonlinearly elastic supports. PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, no.3, pp.23-31. doi: 10.15593/perm.mech/2022.3.03

30. Hajdarov L.I., Kajumov R.A., Shmelev G.N., Gimazetdinov A.R. Prodol'nyj izgib szhatogo uprugogo sterzhnja s odinakovymi nelinejnymi povorotnymi zakreplenijami na koncah s uchjotom nachal'noj krivizny [Longitudinal bending of a compressed elastic rod with the same nonlinear rotary anchors at the ends, taking into account the initial curvature]. Izvestija KGASU, 2022, no.3(61), pp. 23-35.

31. Salih Can Rakici, Fatmir Menkulasi, Out-of-plane buckling strength of free standing singly symmetric hollow pinned circular arches. Journal of Constructional Steel Research, 2021, vol.186, 106914, ISSN 0143-974X. doi: org/10.1016/j.jcsr.2021.106914.

32. Kayumov R. A., Tazyukov B. F., Mukhamedova I. Z., Shakirzyanov F. R. Bol'shie progiby viazkouprugikh panelei [Large deflections of viscoelastic panels]. Russian Mathematics, 2019, vol.63, no.11, pp. 71-76.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора 100 %.

Funding. The study was not sponsored.
Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.
The contribution of the author 100 %.