Гандилян, Д.В. Деформирование тонкой пленки после утери контакта с цилиндрическим основанием с учетом влияния его кривизны, податливости и действия поперечных сил; отслоение, расположенное в окружном направлении / Д.В. Гандилян // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 2. – С. 42–52. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.05

Perm Polytech Style: Gandilyan D.V. Deformation of a Thin Film after Contact Loss with a Cylindrical Base Under the Influence of its Curvature, Compliance and Transverse Forces; Delamination Located in the Circumferential Direction. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 2, pp. 42-52. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.05

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.05
УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ПОСЛЕ УТЕРИ КОНТАКТА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ЕГО КРИВИЗНЫ, ПОДАТЛИВОСТИ И ДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ; ОТСЛОЕНИЕ, РАСПОЛОЖЕННОЕ В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Д.В. Гандилян

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 03 июля 2023 г.
Одобрена: 29 апреля 2024 г.
Принята к публикации:
21 мая 2024 г.

Ключевые слова:

покрытие, основание, цилиндрическая оболочка, радиус кривизны, скорость высвобождения энергии, обобщенная упругая заделка, гофрирование.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрен процесс образования отслоения покрытия от цилиндрического основания под действием сжимающих напряжений. Решение задачи получено в рамках теории цилиндрических оболочек. В качестве уравнений равновесия использовались уравнения Муштари – Доннелла – Власова, а в качестве граничных условий – условия типа обобщенной упругой заделки. Получены выражения для компонент смещения покрытия и скорости высвобождения энергии при отслоении вдоль прямолинейной и криволинейной границы отслоения.

Получены профили отслоившегося участка покрытия. Выявлена роль, вносимая податливостью основания и ее кривизны в значения скорости высвобождения энергии и угла поворота в точке заделки, а также в изменение формы профиля покрытия. Показано, что при увеличении податливости основания, а также (положительной) кривизны значения скорости высвобождения энергии и величины нормальной компоненты смещения покрытия существенно возрастают. Обнаружено, что при достаточно больших значениях кривизны основания в профиле отслоившегося участка покрытия возникает эффект гофрирования, что приводит к появлению локальных экстремумов в графике зависимости скорости высвобождения энергии от протяженности отслоения. Данного эффекта не наблюдалось при исследовании отслоения, расположенном в продольном направлении [1]. Также показано, что для достаточно податливых оснований существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться за счет удлинения, чем за счет расширения. При увеличении положительной кривизны и податливости основания значение критической ширины уменьшается. Также рассмотрено альтернативное условие существования критической ширины отслоения, заключающееся в исследовании величины угла поворота в точке заделки, соответствующей перекрытию поверхностей покрытия и основания при значении угла равного нулю.

© **Гандилян Давид Ваганович** – аспирант, м. н. с. лаб., e-mail: david.ghandilyan@mail.ru.

David V. Gandilyan – Graduate student, Junior Research, Laboratory of Mechanics of Technological Processes, e-mail: david.ghandilyan@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

DEFORMATION OF A THIN FILM AFTER CONTACT LOSS WITH A CYLINDRICAL BASE, WITH ACCOUNTING FOR THE INFLUENCE OF ITS CURVATURE, COMPLIANCE, AND ACTION OF TRANSVERSE FORCES; DELAMINATION LOCATED IN THE CIRCUMFERENTIAL DIRECTION

D.V. Gandilyan

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 03 July 2023
Approved: 29 April 2024
Accepted for publication:
21 May 2024

Keywords:

coating, base, cylindrical shell, radius of curvature, energy release rate, radius of curvature, generalized elastic embedding, corrugation.

ABSTRACT

The process of delamination of a coating from a cylindrical substrate under the action of compressive stresses is considered. The solution of the problem was obtained within the theory of cylindrical shells. The Mushtari-Donnell-Vlasov equations were used as the equilibrium equations, and the conditions of the generalized elastic clamped type were used as the boundary conditions. Expressions are obtained for the coating displacement components and the energy release rate during delamination along the rectilinear and curvilinear delamination boundaries. The profiles of the exfoliated section of the coating were obtained. The role of the substrate compliance and its curvature on the values of the energy release rate and the angle of rotation at the clamping point, as well as in the change in the shape of the coating profile, is revealed. It is shown that with an increase in the compliance of the substrate, as well as the value of (positive) curvature, the value of the energy release rate and the value of the normal component of the displacement of the coating increase significantly. It has been found that at sufficiently large values of the substrate curvature, a corrugation effect occurs in the profile of the delaminated section of the coating, which leads to the appearance of local extrema in the graph of the dependence of the energy release rate on the delamination length. This effect was not observed in the delamination located in the longitudinal direction [1]. It is also shown that for sufficiently compliant substrates there is a certain critical delamination width, for which it becomes energetically more favorable for delamination to develop in the circumferential direction than in the axial one. As the positive curvature and compliance of the substrate increase, the value of the critical width decreases. An alternative criterion for the critical delamination width is also considered, which consists in studying the value of the angle of rotation at the embedding point, which corresponds to the overlap of the coating and substrate surfaces at an angle value of zero.

Введение

Покрытия являются важным элементом в различных приборах и устройств в микро- и наноэлектронике, с помощью которых повышается твердость и износостойкость эксплуатируемых приборов. В процессе эксплуатации деталей, особенно в сложных термомеханических условиях, в покрытиях могут развиваться дефекты. Одним из характерных видов дефекта является отслоение покрытия [1–7].

Механические напряжения, возникающие в покрытиях во время эксплуатации деталей, оказывают существенное влияние на их долговечность и надежность. В частности, сжимающие напряжения могут способствовать краевому отслоению и скалыванию покрытий [8; 9] либо приводить к их короблению или гофрированию [10-12].

Также на процесс отслоения покрытия влияют такие факторы, как кривизна и податливость основания, влияние которых исследовалось для металлических, оксидных и полупроводниковых покрытий в [12; 13]. В работах [14; 15] исследовалось влияние кривизны, а в [16–18] – податливости основания на параметры возможного отслоения покрытия. Одновременное влияние кривизны и податливости основания исследовалось в работах [1; 19; 20]. В частности, в [19] рассматривалась модель, не учитывающая влияние поперечных сил на компоненты смещения и угол поворота в точке заделки, в [20] – модель слабо искривленной пластины. В работе [1] исследовалось отслоение покрытия в осевом направлении в рамках более общей теории нелинейных цилиндрических оболочек, в данном исследовании анализируется отслоение покрытия в окружном направлении.

В работе получены выражения для скорости высвобождения энергии при отслоении вдоль границ отслоения, угла поворота в точке заделки, также получен профиль отслоившегося участка покрытия. Исследованы зависимости скорости высвобождения энергии, угла поворота в точке заделки от значений податливости основания и ее кривизны, также рассмотрено условие существования критической ширины отслоения аналогично исследованиям [1; 19; 20].

1. Постановка задачи, общие соотношения

Рассмотрим деформирование отслоившегося участка покрытия толщины h, соединенного с цилиндрическим основанием радиуса R. Для решения данной задачи воспользуемся криволинейной системой координат (рис. 1), компоненты смещений в срединной поверхности покрытия обозначим: $v(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$.

До отслоения на покрытие вдоль координатных линий α,β, γ (рис. 2) действовали сжимающие усилия

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma h, \\ P_1 &= \sigma h, \quad \sigma > 0, \\ N_1 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где l – полуширина отслоившего участка покрытия. На основание действовало растягивающее напряжение

$$p_0 = \sigma \frac{h}{R}.$$

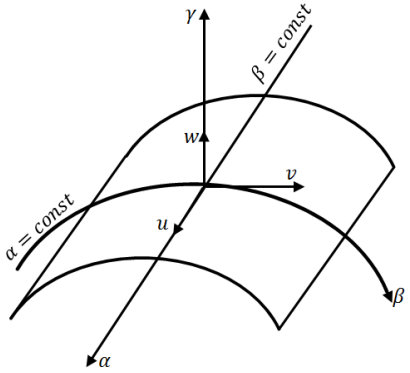
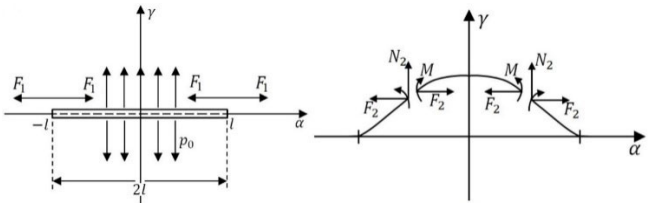


Рис. 1. Криволинейная система координат

Fig. 1. Curvilinear coordinate system



a *b*

Рис. 2. Распределение силовых параметров: *a* – до отслоения покрытия; *b* – после отслоения покрытия

Fig. 2. Distribution of force parameters: *a* – before delamination of the coating; *b* – after delamination of the coating

После отслоения на покрытие вдоль координатных линий α,β, γ (рис. 3) действуют усилия F_2, P_2, N_2 и изгибающий момент M в точке заделки.

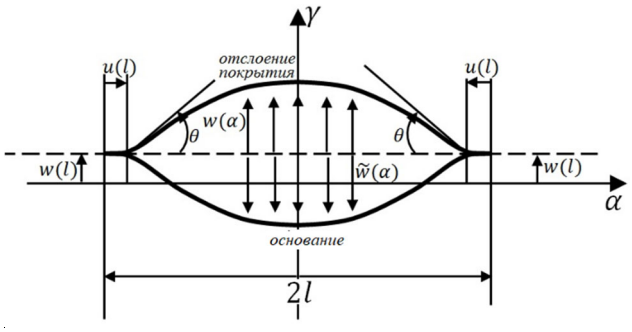


Рис. 3. Геометрия отслоения покрытия

Fig.3. Delamination of the coating

Для достаточно протяженного отслоения сечения, расположенные вдали от концов, могут быть рассмотрены в приближении плоской деформации, при этом одна из тангенциальных компонент смещений отсутствует, т.е. $v(\alpha,\beta) = 0$, а остальные компоненты зависят только от одной переменной: $u = u(\alpha)$, $w = w(\alpha)$. В дальнейшем анализе используются следующие параметры (см. рис. 3):

$\theta = -w'(\alpha)\big|_{\alpha=l}$ – угол поворота отслоения в точке заделки;

$\tilde{w}(\alpha)$ – смещение поверхности основания.

Дифференциальные уравнения изгибаемой по образующей цилиндрического покрытия имеют вид [21–24]:

$$\begin{aligned} D\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\nu}{R}F_2 + (\nu - 1)\frac{\sigma h}{R} + Eh\left(\frac{w}{R^2}\right) = 0, \\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{dF_2}{d\alpha} = 0, \tag{3}$$

где D – изгибная жесткость покрытия, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона покрытия.

Граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dw}{d\alpha}(\alpha = 0) = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\alpha^3}(\alpha = 0) = 0, \\ &\frac{d^2 w}{d\alpha^2}(\alpha = l) = \frac{M}{D}, \quad w(\alpha = l) = w_l. \end{aligned} \tag{4}$$

Неизвестными в рассматриваемой задаче являются изгибающий момент M, смещение в точке заделки w_l и усилия F_2, N_2.

Из условий баланса сил, а также закона Гука следует, что компоненты F_2, P_2, N_2 имеют вид [19; 20] (для удобства обозначим $F_2 = T$, $T > 0$)

$$F_2 = T,$$

$$P_2 = \nu F_2 - (\nu - 1)\sigma h - (1-\nu^2)\bar{E}h\left(\frac{w}{R}\right), \tag{5}$$

$$N_2 = \frac{1}{R}\int_0^l P_2 d\alpha = \frac{1}{R}\left(\nu F_2 l - (\nu - 1)\sigma h - (1-\nu^2)\bar{E}h\int_0^l \left(\frac{w}{R}\right)d\alpha\right).$$

Граничные условия примем в виде условий обобщенной упругой заделки [1, 25].

$$\bar{E}\begin{pmatrix} u(l) \\ -hw'(l) \\ w(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ h^{-1}M \\ N \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)}. \tag{6}$$

Эффективные продольные F и поперечные (перерезывающие) N усилия определяются следующим образом

$$F = F_2 - F_1 = T - \sigma h,$$

$$N = N_2 - N_1 = \frac{1}{R}\left(\nu F_2 l + (1-\nu)\sigma h l - (1-\nu^2)\bar{E}h\int_0^l \left(\frac{w}{R}\right)d\alpha\right) - 0 =$$

$$= \frac{1}{R}\left(\nu T l + (1-\nu)\sigma h l - (1-\nu^2)\bar{E}h\int_0^l \left(\frac{w}{R}\right)d\alpha\right). \quad (7)$$

С учетом выражений (7) граничные условия (6) записываются в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}u(l) &= a_{11}(T-\sigma h) + a_{12}h^{-1}M + a_{13}N, \\ -\bar{E}hw'(l) &= a_{12}(T-\sigma h) + a_{22}h^{-1}M + a_{23}N, \\ \bar{E}w(l) &= a_{13}(T-\sigma h) + a_{23}h^{-1}M + a_{33}N. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение дифференциального уравнения (2) с учетом условия (3) и граничных условий (4) есть

$$w(\alpha) = (\nu T - (\nu-1)\sigma h)\frac{R}{Eh} + C_1\cos(b_1\alpha) + C_2\cos(b_2\alpha), \quad (9)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{b_1^2\cos(b_1 l)}\left(-\frac{M}{D} - \right.$$

$$\left. -\frac{b_2^2}{\left(1-(b_2/b_1)^2\right)}\left(w(\alpha=l) - (\nu T - (\nu-1)\sigma h)\frac{R}{Eh} + \frac{M}{b_1^2 D}\right)\right), \quad (10)$$

$$C_2 = \frac{1}{\left(1-(b_2/b_1)^2\right)\cos(b_2 l)}\left(w(\alpha=l) - (\nu T - (\nu-1)\sigma h)\frac{R}{Eh} + \frac{M}{b_1^2 D}\right), \quad (11)$$

$$b_1 = \frac{\lambda}{l\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4EhD}{T^2R^2}}}, \quad (12)$$

$$b_2 = \frac{\lambda}{l\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4EhD}{T^2R^2}}}, \quad (13)$$

параметр λ есть

$$\lambda = l\sqrt{\frac{T}{D}}. \quad (14)$$

Из (9) следует, что прогиб в центре отслоения покрытия равен

$$w(\alpha=0) = (\nu T - (\nu-1)\sigma h)\frac{R}{Eh} + C_1 + C_2. \quad (15)$$

Для определения параметров M, T, w_l в (9) воспользуемся граничными условиями (6).

До отслоения на покрытие действовали напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}^0$ и $\sigma_{\beta\beta}^0$, а после отслоения – $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^0 &= -\frac{F_1}{h} = -\sigma, \\ \sigma_{\beta\beta}^0 &= -\frac{P_1}{h} = -\sigma, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= -\frac{F_2}{h} = -\frac{T}{h}, \\ \sigma_{\beta\beta} &= -\frac{P_2}{h}, \\ \Delta\sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}^0 = \frac{-T+\sigma h}{h} = \frac{-F}{h}, \\ \Delta\sigma_{\beta\beta} &= \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\beta\beta}^0 = \frac{-P_2+\sigma h}{h}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения для компонент дополнительных деформаций [14; 15] в принятой постановке задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2, \\ \Delta\varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{w}{R}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подстановка (16) в выражение для дополнительных деформаций (17) дает

$$\frac{\Delta\sigma_{\alpha\alpha}}{\bar{E}} = \Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{-F}{\bar{E}h} = \frac{-T+\sigma h}{\bar{E}h} = \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2 + \nu\frac{w}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\alpha} = \frac{-F}{\bar{E}h} - \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2 - \nu\frac{w}{R}. \quad (18)$$

Интегрирование данного выражения от 0 до l дает разность тангенциального смещения в точках l и 0. В силу симметрии $u(\alpha=0)=0$, следовательно:

$$u(l) = \frac{-F}{\bar{E}}\frac{l}{h} - \int_0^l\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 + \nu\frac{w}{R}\right)d\alpha. \quad (19)$$

Подстановка (9) в (19) и интегрирование дает

$$u(l) = \frac{(-T+\sigma h)}{\bar{E}}\frac{l}{h} - \frac{l\nu}{R}\frac{R}{Eh}(\nu T - (\nu-1)\sigma h) -$$

$$-\left(\frac{C_1\nu\sin(b_1 l)}{b_1 R} + \frac{C_2\nu\sin(b_2 l)}{b_2 R} + \frac{1}{8}b_1 C_1^2(2b_1 l - \sin(2b_1 l)) + \frac{1}{8}b_2 C_2^2(2b_2 l - \sin(2b_2 l)) + \right.$$

$$\left. + \frac{(b_1 l)(b_2 l)C_1 C_2(b_2 l\cos(b_2 l)\sin(b_1 l) - b_1 l\cos(b_1 l)\sin(b_2 l))}{l^3(b_1^2 - b_2^2)}\right). \quad (20)$$

Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} f &= \frac{F}{\sigma h} \qquad n = \frac{N}{\sigma h}, \\ m &= \frac{M}{\sigma h^2} \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{\bar{E}}. \end{aligned} \quad (21)$$

После чего с учетом (7) имеем

$$T = (f+1)\sigma h,$$

$$n = \frac{1}{R}\left(\nu l(f+1) + (1-\nu)l - (1-\nu^2)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^l\left(\frac{w}{R}\right)d\alpha\right). \quad (22)$$

Из условия положительности параметров σ, T, а также того, что $\sigma h > T$, следует, что $-1 < f < 0$. Параметр λ в безразмерных величинах примет вид

$$\lambda = l\sqrt{\frac{T}{D}} = l\sqrt{\frac{(f+1)\sigma h 12}{\bar{E}h^3}} = \frac{l}{h}\sqrt{(f+1)12\varepsilon} = \eta\pi\sqrt{(f+1)}, \quad (23)$$

где η – отношение полуширины отслоения к критической полуширине, соответствующей потере устойчивости отслоения от прямолинейной границы при условии граничных условий типа жесткой заделки:

$$\eta = \frac{l}{l_0}, \quad (24)$$

$$l_0 = \frac{\pi}{\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}}\sqrt{\frac{E}{\sigma}} = \frac{h\pi}{\sqrt{12\varepsilon}}. \quad (25)$$

В безразмерных величинах выражения (9), (20) запишутся следующим образом

$$\frac{w(l)}{h} = (\nu f + 1)\frac{\varepsilon}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{\pi}{k\sqrt{12\varepsilon}} + \left(\frac{C_1}{h}\right)\cos(b_1 l) + \left(\frac{C_2}{h}\right)\cos(b_2 l), \quad (26)$$

$$\frac{u(l)}{h} = -\frac{f\eta\varepsilon\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} - \frac{\eta\pi}{\sqrt{12\varepsilon}}\frac{\nu\varepsilon}{\left(1-\nu^2\right)}(\nu f + 1) - \frac{(C_1/h)\nu\sin(b_1 l)\eta k}{b_1 l} - \frac{(C_2/h)\nu\sin(b_2 l)\eta k}{b_2 l} -$$

$$-\frac{1}{8}(b_1 l)\left(\frac{C_1}{h}\right)^2\left(2b_1 l - \sin(2b_1 l)\right)\frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta} - \frac{1}{8}(b_2 l)\left(\frac{C_2}{h}\right)^2\left(2b_2 l - \sin(2b_2 l)\right)\frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta} -$$

$$-\frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta}\frac{(b_1 l)(b_2 l)(C_1/h)(C_2/h)}{l^2\left(b_1^2 - b_2^2\right)}\left(b_2 l\cos(b_2 l)\sin(b_1 l) - b_1 l\cos(b_1 l)\sin(b_2 l)\right), \quad (27)$$

где

$$\frac{C_1}{h} = \frac{1}{(b_1 l)^2\cos(b_1 l)}\left(-m\eta^2\pi^2 - \left(\frac{C_2}{h}\right)(b_2 l)^2\cos(b_2 l)\right),$$

$$\frac{C_2}{h} = \frac{1}{\left(1-(b_2/b_1)^2\right)\cos(b_2 l)}\left(\frac{w(l)}{h} - \frac{(\nu f+1)}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{\pi\varepsilon}{k\sqrt{12\varepsilon}} + \frac{m\eta^2\pi^2}{(b_1 l)^2}\right),$$

$$(b_1 l) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\left(1-\nu^2\right)}{\pi^2(f+1)^2\varepsilon}k^2}},$$

$$(b_2 l) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\left(1-\nu^2\right)}{\pi^2(f+1)^2\varepsilon}k^2}},$$

$$k = \frac{l_0}{R}.$$

Также с учетом (21) граничные условия (8) представим в более удобном виде

$$\frac{u(l)}{h} = a_{11}\frac{F}{\bar{E}h} + a_{12}\frac{M}{\bar{E}h^2} + a_{13}\frac{N}{\bar{E}h} = a_{11}f\varepsilon + a_{12}m\varepsilon + a_{13}n\varepsilon, \quad (28)$$

$$-\frac{dw(l)}{d\alpha} = a_{12}\frac{F}{\bar{E}h} + a_{22}\frac{M}{\bar{E}h^2} + a_{23}\frac{N}{\bar{E}h} = a_{12}f\varepsilon + a_{22}m\varepsilon + a_{23}n\varepsilon, \quad (29)$$

$$\frac{w(l)}{h} = a_{13}\frac{F}{\bar{E}h} + a_{23}\frac{M}{\bar{E}h^2} + a_{33}\frac{N}{\bar{E}h} = a_{13}f\varepsilon + a_{23}m\varepsilon + a_{33}n\varepsilon. \quad (30)$$

Вычислим производную от смещения $w(\alpha)$, которая определяется выражением (9)

$$\frac{dw}{d\alpha} = -C_1 b_1\sin(b_1\alpha) - C_2 b_2\sin(b_2\alpha), \quad (31)$$

в безразмерных величинах принимающая вид

$$\frac{dw(\alpha = l)}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta}\left(\frac{C_1}{h}\right)(b_1 l)\sin(b_1 l) - \frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta}\left(\frac{C_2}{h}\right)(b_2 l)\sin(b_2 l). \quad (32)$$

Подстановка полученных выражений для $u(\alpha)$, $w(\alpha)$, $w'(\alpha)$ (26), (27), (32) в граничные условия (28)–(30) дает систему из трех уравнений, определяющую значения трех неизвестных переменных m, f, w_l.

2. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы отслоения

Аналогично [1], скорость высвобождения энергии при распространении отслоения в направлении криволинейной границы G_{ss} вычисляется как высвобождающаяся упругая энергия единицы длины отслоившегося участка, деленная на его ширину, равную $2l$, состоящая из энергии, высвободившейся из изгибаемого участка покрытия ΔU_1, неотслоившегося участка покрытия ΔU_2 и энергии, высвободившейся из основания ΔU_3.

Первая из данных величин вычисляется как разница упругой энергии отслоившегося участка до и после отслоения

$$\Delta U_1 = U_{1before} - U_{1after}. \quad (33)$$

Удельная потенциальная энергия деформации $\tilde{U}_1$ (энергия на единицу объема) есть [15]

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta}\varepsilon_{\beta\beta} + \sigma_{\gamma\gamma}\varepsilon_{\gamma\gamma} + \sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\gamma}\varepsilon_{\beta\gamma} + \sigma_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\gamma\alpha}\right). \quad (34)$$

В данной задаче последнее выражение упростится до вида

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta}\varepsilon_{\beta\beta}\right). \quad (35)$$

Удельная потенциальная энергия деформации до и после отслоения выражается через дополнительные компоненты напряжения и деформации в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\alpha}=\sigma^0_{\alpha\alpha}+\Delta\sigma_{\alpha\alpha}\qquad \varepsilon_{\alpha\alpha}=\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha},\\ \sigma_{\beta\beta}=\sigma^0_{\beta\beta}+\Delta\sigma_{\beta\beta}\qquad \varepsilon_{\beta\beta}=\varepsilon^0_{\beta\beta}+\Delta\varepsilon_{\beta\beta},\\ \tilde U_{1before}=\frac{1}{2}\left(\sigma^0_{\alpha\alpha}\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\sigma^0_{\beta\beta}\varepsilon^0_{\beta\beta}\right),\\ \tilde U_{1after}=\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^0_{\alpha\alpha}+\Delta\sigma_{\alpha\alpha}\right)\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}\right)+\left(\sigma^0_{\beta\beta}+\Delta\sigma_{\beta\beta}\right)\left(\varepsilon^0_{\beta\beta}+\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right)\right).\end{gathered}\tag{36}$$

Учитывая связь между компонентами напряжений и деформаций, получаем

$$\tilde U_{1before}=\frac{1}{2}\left(\overline{E}\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\nu\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\overline{E}\left(\varepsilon^0_{\beta\beta}+\nu\varepsilon^0_{\alpha\alpha}\right)\varepsilon^0_{\beta\beta}\right),$$

$$\begin{gathered}\tilde U_{1after}=\frac{1}{2}\left(\overline{E}\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\nu\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\overline{E}\left(\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+\nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right)\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\overline{E}\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\nu\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+\right.\\ +\overline{E}\left(\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+\nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right)\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+\overline{E}\left(\varepsilon^0_{\beta\beta}+\nu\varepsilon^0_{\alpha\alpha}\right)\varepsilon^0_{\beta\beta}+\overline{E}\left(\Delta\varepsilon_{\beta\beta}+\nu\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}\right)\varepsilon^0_{\beta\beta}+\\ \left.+\overline{E}\left(\varepsilon^0_{\beta\beta}+\nu\varepsilon^0_{\alpha\alpha}\right)\Delta\varepsilon_{\beta\beta}+\overline{E}\left(\Delta\varepsilon_{\beta\beta}+\nu\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}\right)\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right).\end{gathered}\tag{37}$$

Выражение для высвободившейся удельной потенциальной энергии деформации принимает вид

$$\begin{gathered}\Delta\tilde U_1=\tilde U_{1before}-\tilde U_{1after}=-\frac{1}{2}\overline{E}\left(2\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\left(\nu\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)+\right.\\ \left.+2\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\nu\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)+\left(\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+\nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right)\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+\left(\Delta\varepsilon_{\beta\beta}+\nu\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}\right)\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right).\end{gathered}\tag{38}$$

Потенциальная упругая энергия, отнесенная на единицу длины координаты β, вычисляется через интегрирование удельной энергии

$$\begin{gathered}\Delta U_1=U_{1before}-U_{1after}=\int_{-l}^{l}\int_{-h/2}^{h/2}\tilde U_{1before}d\gamma d\alpha-\int_{-l}^{l}\int_{-h/2}^{h/2}\tilde U_{1after}d\gamma d\alpha=\\ =\int_{-l}^{l}\int_{-h/2}^{h/2}\Delta\tilde U_1 d\gamma d\alpha=\int_{-l}^{l}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{2}\overline{E}\left(2\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\left(\nu\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)+\right.\\ \left.+2\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\nu\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)+\left(\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+\nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right)\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+\left(\Delta\varepsilon_{\beta\beta}+\nu\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}\right)\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right)d\gamma d\alpha.\end{gathered}\tag{39}$$

Связь между дополнительными деформациями и компонентами смещений имеет вид [14; 22]

$$\begin{gathered}\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}=\varepsilon_1+\gamma K_1,\\ \Delta\varepsilon_{\beta\beta}=\varepsilon_2+\gamma K_2.\\ \varepsilon_1=\frac{du}{d\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2,\qquad K_1=\frac{d^2w}{d\alpha^2},\\ \varepsilon_2=\frac{w}{R},\qquad K_2=\frac{d^2w}{d\beta^2}=0.\end{gathered}\tag{40}$$

Подставляя последнее соотношение в (39) с использованием выражения (16), получаем

$$\begin{gathered}\Delta U_1=-\frac{1}{2}\overline{E}\int_{-l}^{l}\int_{-h/2}^{h/2}\left(2\varepsilon_2\left(\nu\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)+2\left(\varepsilon_1+\gamma K_1\right)\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\nu\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)+\right.\\ \left.+\left(\left(\varepsilon_1+\gamma K_1\right)+\nu\varepsilon_2\right)\left(\varepsilon_1+\gamma K_1\right)+\left(\varepsilon_2+\nu\left(\varepsilon_1+\gamma K_1\right)\right)\varepsilon_2\right)d\gamma d\alpha=\\ =-\frac{1}{2}\overline{E}\int_{-l}^{l}\left(2\varepsilon_2\left(\nu\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)h+2\varepsilon_1\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\nu\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)h+\left(\varepsilon_1^2+2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\right)h+\frac{h^3}{12}K_1^2\right)d\alpha=\end{gathered}$$

$$=\left|\begin{array}{c}F_1=-\sigma^0_{\alpha\alpha}h=-\overline{E}\left(\varepsilon^0_{\alpha\alpha}+\nu\varepsilon^0_{\beta\beta}\right)h=\sigma h\\ P_1=-\sigma^0_{\beta\beta}h=-\overline{E}\left(\varepsilon^0_{\beta\beta}+\nu\varepsilon^0_{\alpha\alpha}\right)h=\sigma h\\ -\frac{F}{\overline{E}h}=\frac{\left(-T+\sigma h\right)}{\overline{E}h}=\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2\end{array}\right|=$$

$$=-\int_{-l}^{l}\left(-\varepsilon_2\sigma h-\varepsilon_1\sigma h+\nu\varepsilon_1\varepsilon_2\overline{E}h+\frac{h^3}{24}\overline{E}K_1^2+\frac{1}{2}\overline{E}h\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}\overline{E}h\varepsilon_2^2\right)d\alpha=$$

$$=\frac{\left(\sigma h\right)^2}{\overline{E}h}l-\frac{T^2l}{\overline{E}h}+\int_0^l\left(2\sigma h\left(1-\nu\right)\frac{w}{R}-\left(\frac{w}{R}\right)^2\left(1-\nu^2\right)\overline{E}h\right)d\alpha-D\int_0^l\left(\frac{d^2w}{d\alpha^2}\right)^2d\alpha.\tag{41}$$

Энергию ΔU_2 определим как работу сил, действующих на неотслоившиеся участки покрытия

$$\begin{gathered}\Delta U_2=\left(T+\sigma h\right)\left(-u\left(\alpha=l\right)\right)-M\left(-w'\left(\alpha=l\right)\right)-\\ -\frac{1}{R}\left(\nu Tl+\left(1-\nu\right)\sigma hl-\left(1-\nu^2\right)\overline{E}h\int_0^l\left(\frac{w}{R}\right)d\alpha\right)w\left(\alpha=l\right)=\\ =\left(f+2\right)\sigma h\left(-u\left(\alpha=l\right)\right)-m\sigma h^2\left(-w'\left(\alpha=l\right)\right)-n\sigma hw\left(\alpha=l\right).\end{gathered}\tag{42}$$

Энергия ΔU_3, учитывающая влияние основания на покрытие до отслоения, записывается в виде [1; 26; 27]

$$\Delta U_3=\frac{\left(\overline{E}+\overline{E_s}\right)}{\overline{E}\,\overline{E_s}}\frac{\left(\sigma h\right)^2}{2R^2}l^2\pi.\tag{43}$$

Удельная упругая энергия не отслоившегося покрытия имеет следующий вид

$$G_0=\frac{\left(1-\nu^2\right)}{2}\frac{\sigma^2h}{E}=\frac{\sigma^2h}{2\overline{E}}.\tag{44}$$

Скорость высвобождения энергии (отнесенная к энергии покрытия до потери устойчивости), с учетом выражения (9), а также величин (8), входящих в (42), есть

$$\begin{gathered}\frac{G_{ss}}{G_0}=\frac{\left(\Delta U_1+\Delta U_2+\Delta U_3\right)}{2lG_0}=\\ =\left(1-\left(f+1\right)^2\right)+2\left(1-\nu\right)\frac{k\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\varepsilon}\left(\left(1+\nu f\right)\frac{\varepsilon\pi}{\left(1-\nu^2\right)k\sqrt{12\varepsilon}}+\right.\\ +\frac{\left(C_1/h\right)\sin\left(b_1l\right)}{b_1l}+\frac{\left(C_2/h\right)\sin\left(b_2l\right)}{b_2l}\Big)-\left(1-\nu^2\right)\frac{3k^2}{\varepsilon\pi^2}\left(4\left(1+\nu f\right)^2\frac{\varepsilon\pi^2}{12\left(1-\nu^2\right)^2k^2}+\right.\\ +2\left(\frac{C_1}{h}\right)^2+2\left(\frac{C_2}{h}\right)^2+\frac{8\sin\left(b_1l\right)}{b_1l}\left(\frac{C_1}{h}\right)\left(\left(1+\nu f\right)\frac{\varepsilon\pi}{\left(1-\nu^2\right)k\sqrt{12\varepsilon}}+\frac{\left(b_1l\right)^2\cos\left(b_2l\right)}{l^2\left(b_1^2-b_2^2\right)}\left(\frac{C_2}{h}\right)\right)+\\ +\left(\frac{C_1}{h}\right)^2\frac{\sin\left(2b_1l\right)}{b_1l}+\frac{8\sin\left(b_2l\right)}{b_2l}\left(\frac{C_2}{h}\right)\left(\left(1+\nu f\right)\frac{\varepsilon\pi}{\left(1-\nu^2\right)k\sqrt{12\varepsilon}}+\frac{\left(b_2l\right)^2\cos\left(b_1l\right)}{l^2\left(b_2^2-b_1^2\right)}\left(\frac{C_1}{h}\right)\right)+\\ \left.+\left(\frac{C_2}{h}\right)^2\frac{\sin\left(2b_2l\right)}{b_2l}\right)-\frac{3}{\eta^4\pi^4}\left(2\left(b_1l\right)^4\left(\frac{C_1}{h}\right)^2+2\left(b_2l\right)^4\left(\frac{C_2}{h}\right)^2+\left(b_1l\right)^3\left(\frac{C_1}{h}\right)^2\sin\left(2b_1l\right)+\right.\end{gathered}$$

$$+(b_2 l)^3\left(\frac{C_2}{h}\right)^2\sin(2b_2 l)+\frac{8(b_1 l)^3(b_2 l)^2}{l^2(b_1^2-b_2^2)}\left(\frac{C_1}{h}\right)\left(\frac{C_2}{h}\right)\cos(b_2 l)\sin(b_1 l)+$$

$$+\frac{8(b_1 l)^2(b_2 l)^3}{l^2(b_2^2-b_1^2)}\left(\frac{C_1}{h}\right)\left(\frac{C_2}{h}\right)\cos(b_1 l)\sin(b_2 l)\Bigg)+\frac{(\bar{E}+\bar{E}_s)}{\bar{E}_s}k^2\eta\sqrt{3\varepsilon}-$$

$$-\frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta}\Big((f+2)(a_{11}f+a_{12}m+a_{13}n)+m(a_{12}f+a_{22}m+a_{23}n)+$$

$$+n(a_{13}f+a_{23}m+a_{33}n)\Big). \quad (45)$$

Аналогично тому, как это делалось в [1], скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейной границы G рассчитывается как непосредственное изменение упругой энергии при увеличении длины отслоения [18–20]

$$\frac{G}{G_0}=\frac{d}{db}\left(\frac{\Delta U_1+\Delta U_2+\Delta U_3}{2G_0}\right)=\eta\frac{d}{d\eta}\left(\frac{G_{ss}}{G_0}\right)+\left(\frac{G_{ss}}{G_0}\right), \quad (46)$$

где G_{ss}/G_0 определяется с помощью (46).

Значения коэффициентов матрицы жесткости $a_{ij},(i,j=1,2,3)$ есть [1; 16; 17; 20; 28–32]:

$$a_{11}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}}+\frac{3}{2}\left[\frac{b}{h}\left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)^3\right]^{1/4},\quad a_{12}=\sqrt{3}+0,27\left(\frac{h}{b}\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)^{2/3}, \quad (47)$$

$$a_{22}=12\delta,\ \ a_{13}=1+\sqrt{3}\delta,\ \ a_{23}=\frac{3}{2}+6\delta^2,\quad \delta=0,635\left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)^{1/3}, \quad (48)$$

$$a_{33}=\frac{1}{6\pi}\left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)\left[\frac{1}{3}+\tilde{\gamma}+\frac{8\sqrt{3}\pi}{27}+\ln\left(\left(6\frac{\bar{E}_s}{\bar{E}}\right)^{1/3}\frac{b}{h}\right)\right], \quad (49)$$

где $\tilde{\gamma}=0,5772\ldots$ – постоянная Эйлера.

3. Результаты численных расчетов

Графики зависимости скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы $\left(G_{ss}/G_0, G/G_0\right)$, угла поворота θ в точке заделки от параметра l/l_0 для различных значений относительной податливости основания $\bar{E}/\bar{E}_s$, а также для различных величин кривизны основания представлены на рис. 4–7. На рис. 8, 9 представлены профили отслоения покрытия при разных значениях l/l_0. Все расчеты были выполнены для значения коэффициента Пуассона, равном $\nu=0,3$.

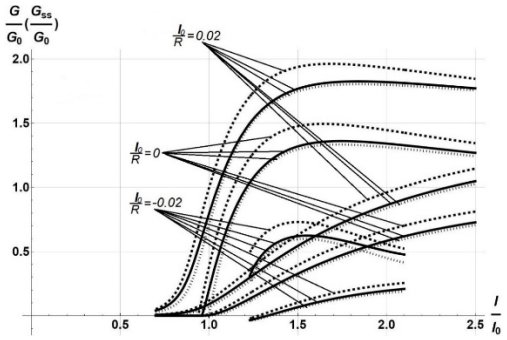


Рис. 4. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной (монотонные ветви) и прямолинейной границы (ветви с максимумами) от l/l_0 при $\sigma/\bar{E}=0,01$ и при $l_0/R=0,+0,02,-0,02$; жесткое основание – сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s=1$ – пунктирные линии; условие жесткой заделки – точечные линии

Fig. 4. Dependence of the rate of energy release during the propagation of delamination along a curvilinear (monotonic branch) and rectilinear boundary (branch with maxima) on l/l_0 when $\sigma/\bar{E}=0.01$ and $l_0/R=0,+0.02,-0.02$; the rigid base is shown with solid lines, $\bar{E}/\bar{E}_s=1$ is shown with dashed lines; the condition of a rigid clamping is shown with the dotted lines

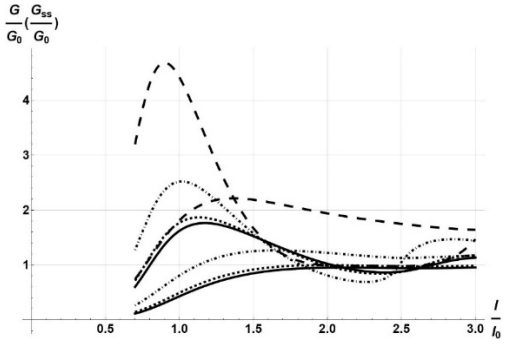


Рис. 5. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной (монотонные ветви) и прямолинейной границы (ветви с максимумами) от l/l_0 при $\sigma/\bar{E}=0,01$ и при $l_0/R=+0,1$; жесткое основание – сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s=1$ – пунктирные линии с короткими штрихами; $\bar{E}/\bar{E}_s=10$ – штрихпунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s=100$ – пунктирные линии с длинными штрихами

Fig. 5. Dependence of the rate of energy release during the propagation of delamination along a curvilinear (monotonic branch) and rectilinear boundary (branch with maxima) on l/l_0 when $\sigma/\bar{E}=0.01$ and when $l_0/R=+0.1$; the rigid base is shown with solid lines; $\bar{E}/\bar{E}_s=1$ is shown with dotted lines with short strokes; $\bar{E}/\bar{E}_s=10$ is shown with dash-dotted lines, $\bar{E}/\bar{E}_s=100$ is shown with dotted lines with long strokes

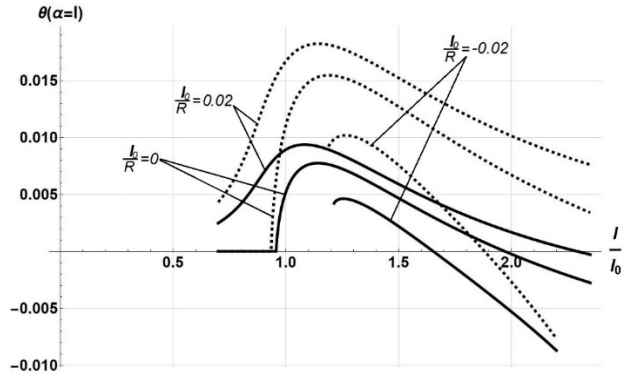


Рис. 6. Зависимость угла поворота θ от l/l_0 при $l_0/R = 0, +0{,}02, -0{,}02$; жесткое основание – сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ – пунктирные линии

Fig. 6. Dependence of the rotation angle θ on l/l_0 when $l_0/R = 0, +0.02, -0.02$; the rigid base is shown with solid lines; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ is shown with dotted lines

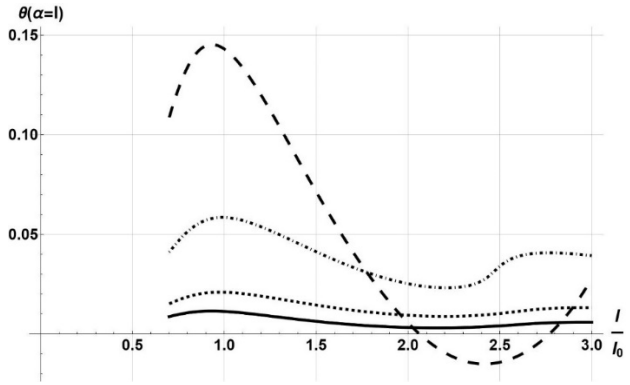
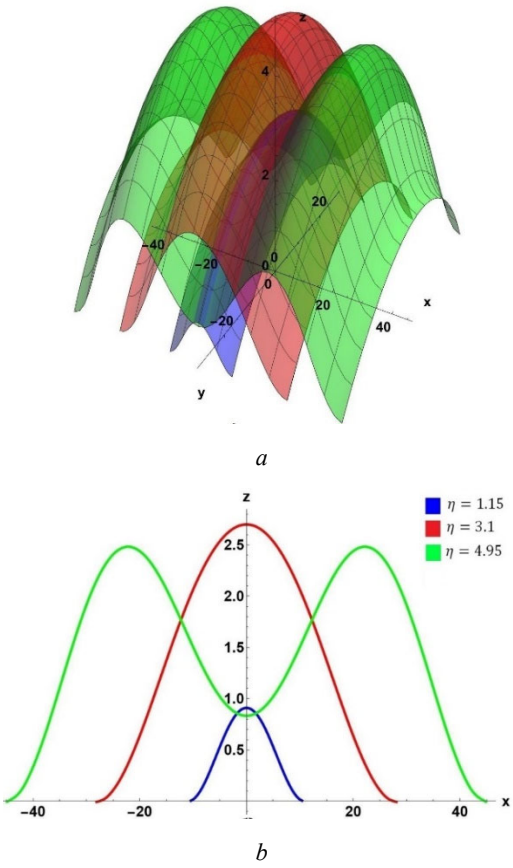


Рис. 7. Зависимость угла поворота θ от l/l_0 при $l_0/R = +0{,}1$; жесткое основание – сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ – пунктирные линии с короткими штрихами; $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ – штрихпунктирные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 100$ – пунктирные линии с длинными штрихами

Fig. 7. Dependence of the rotation angle θ on l/l_0 when $l_0/R = +0.1$; the rigid base is shown with solid lines; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ is shown with dotted lines with short strokes; $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ is shown with dash-dotted lines; $\bar{E}/\bar{E}_s = 100$ is shown with dotted lines with long strokes

Как показано в [1], зависимости скорости высвобождения энергии (47), соответствующие росту отслоения в осевом и окружном направлениях, должны пересекаться в максимуме первого. Можно заметить (рис. 5), что для достаточно податливых оснований существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться за счет удлинения, чем за счет расширения, и чем податливее основание, тем меньше критическая ширина.



a

b

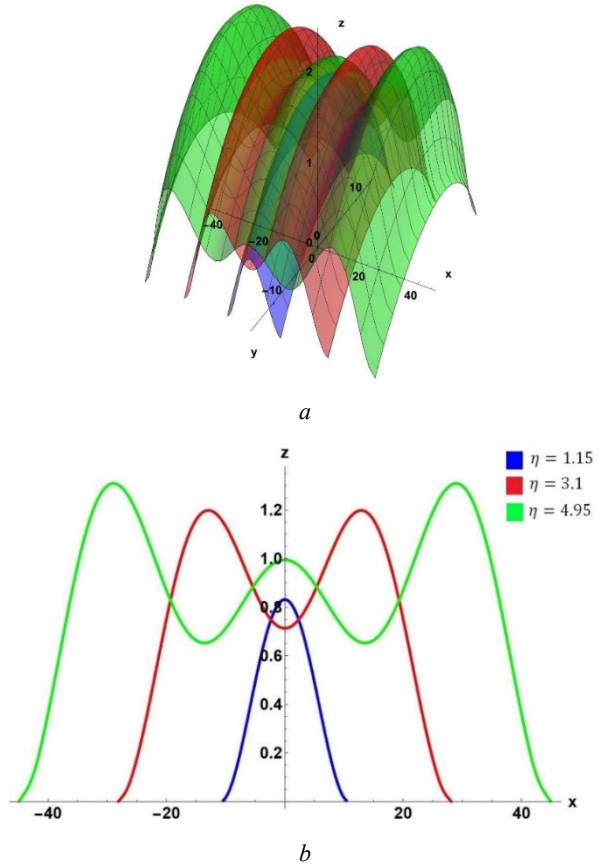
Рис. 8. Профиль отслоения покрытия в зависимости от разных значений $\eta = l/l_0$ при $l_0/R = +0{,}05$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$: *a* – в трехмерном пространстве; *b* – в проекции на двумерное пространство

Fig. 8. Profile of coating delamination depending on different values of $\eta = l/l_0$ when $l_0/R = +0.05$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$: *a* – in three-dimensional space; *b* – in projection onto two-dimensional space

По результатам вычислений можно сделать вывод, что при положительной кривизне основания отслоение покрытия возникает при напряжениях ниже уровня потери устойчивости (скорости высвобождения энергии положительны для всего диапазона l/l_0 (см. рис. 4, 5), угол поворота в точке заделки также положителен (см. рис. 6, 7), а наличие податливости основания только усиливает этот процесс.

Также замечено, что начиная с определенного отрицательного значения кривизны, а именно $l_0/R < -0{,}02$, отслоения покрытия не происходит ввиду того, что в этом случае данный процесс энергетически невыгоден. Расхождение между результатами, полученными с уче-

том влияния поперечных сил и перемещений $(a_{i3} \neq 0)$, и упрощенными моделями $(a_{i3} = 0)$ становится заметным для значения кривизны $l_0/R > 0,3\ldots0,4$.



a

b

Рис. 9. Профиль отслоения покрытия в зависимости от разных значений $\eta = l/l_0$ при $l_0/R = +0,1$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$: *a* – в трехмерном пространстве; *b* – в проекции на двумерное пространство

Fig. 9. Coating delamination profile depending on different values of $\eta = l/l_0$ when $l_0/R = +0.1$ $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$: *a* – in three-dimensional space; *b* – in projection onto two-dimensional space

Обратим внимание и на то, что при увеличении кривизны в результатах профиля отслоения покрытия (см. рис. 8, 9), скорости высвобождения энергии (см. рис. 5) наблюдается эффект «волнистости» (гофрирования), чего не наблюдается для задачи, рассмотренной в работе [1], причем, чем больше значение кривизны, тем сильнее проявляется данный эффект. Аналогично, в рассматриваемой задаче из зависимостей для угла поворота в точке заделки (см. рис. 6, 7) наблюдается критическая ширина отслоения, более которой модель становится физически некорректной ввиду возникновения перекрытия поверхностей покрытия и основания. Физическая невозможность подобного перекрытия предотвращает дальнейший рост отслоения в данном направлении.

Заключение

В рамках теории цилиндрических оболочек получено и исследовано решение задачи об отслоении покрытия от цилиндрического основания, вытянутого в окружном направлении участка покрытия. Решение получено с учетом совместного влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения. В качестве уравнений равновесия использовались уравнения Муштари – Доннелла – Власова, а в качестве граничных условий – граничные условия типа обобщенной упругой заделки, с помощью которых учитывалась податливость основания. Получены выражения для скорости высвобождения энергии при отслоении вдоль границ отслоения, угла поворота в точке заделки, также получены профили отслоившегося участка покрытия. Исследовано изменение скорости высвобождения энергии, профиля отслоения покрытия в зависимости от разных значений податливости основания и ее кривизны. Показано, что при увеличении податливости основания, а также величины (положительной) кривизны значения данных параметров значительно возрастают. Из анализа результатов также следует, что для достаточно податливых оснований существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться в окружном направлении, чем в осевом. Также из полученных результатов можно сделать вывод, что при увеличении положительной кривизны и податливости основания значение критической ширины уменьшается. Показано, что при достаточно больших значениях кривизны основания в профиле отслоения покрытия возникает эффект гофрирования, что приводит к появлению локальных экстремумов в зависимости скорости высвобождения энергии от протяженности отслоения. Исследовано условие распространения отслоения, заключающееся в сравнении величины угла поворота отслоения в точке заделки с нулем [20] (уменьшение значения данного угла до нуля соответствует перекрытию и прекращению дальнейшего отслоения покрытия). Проведено сравнение результатов, полученных с помощью рассмотренной модели, с результатами, полученными с помощью упрощенной модели, не учитывающей влияние нормального смещения и перерезывающей (поперечной) силы в точках заделки [19; 20].

Библиографический список

1. Устинов, К.Б. Деформирование тонкой пленки после утери контакта с цилиндрическим основанием; отслоение, расположенное в осевом направлении / К.Б. Устинов, Д.В. Гандилян // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 5. – С. 159–172. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.11

2. Гольдштейн, Р.В. Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (балочное приближение) / Р.В. Гольд-

штейн, Н.М. Осипенко // Вестник СамГУ-Естественнонаучная серия. – 2007. – № 4(54). – С. 66 – 83.

3. Kachanov, L.M. Delamination Buckling of Composite Materials / L.M. Kachanov. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

4. Li, S. The effects of shear on delamination in layered materials / S. Li, J.Z. Wang, M.D. Thouless // J. Mech. Phys. Solid. – 2004. – Vol. 52, no. 1. – P. 193–214.

5. Andrews, M. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers / M. Andrews, R. Massabo // Eng. Fract. Mech. – 2007. – Vol. 74, no. 17. – P. 2700–2720.

6. Thouless, M.D. Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials / M.D. Thouless // Eng. Fract. Mech. – 2018. – Vol. 191. – P. 153–167.

7. Hutchinson, J.W. Mixed mode cracking in layered materials / J.W. Hutchinson, Z. Suo. – California: Advances in Applied Mechanics edited by J.W. Hutchinson and T.Y. Wu. – 1992. – 191 p.

8. Balint, D.S. Mode II Edge Delamination of Compressed Thin Films / D.S. Balint, J.W. Hutchinson // J. Appl. Mech. – 2001. – Vol. 68. – P. 725–730. DOI: 10.1115/1.1388012

9. Initiation of free-edge delamination in composite laminates / L. Lagunegrand, T. Lorriot, R. Harry, H. Wargnier, J.M. Quenisset // Compos. Sci. Technol. – 2006. – Vol. 66. – P. 1315–1327. DOI: 10.1016/j.compscitech.2005.10.010

10. Hutchinson, J.W. The influence of imperfections on the nucleation and propagation of buckling driven delaminations / J.W. Hutchinson, M.Y. He, A.G. Evans // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – Vol. 48. – P. 709–734. DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00050-2

11. Evans, A.G. The mechanics of coating delamination in thermal gradients / A.G. Evans, J.W. Hutchinson // Surface and Coatings Technology. – 2007. – Vol. 201. – P. 7905–7916.

12. Blistering in Cu2ZnSnS4 thin films: correlation with residual stresses / C. Malerba, M. Valentini, R.C.L. Azanza, A. Rinaldi, A. Mittiga // Mater. Design. – 2016. – Vol. 108. – 16 p. DOI: 10.1016/j.matdes.2016.07.019

13. Residual stress relief of hard a-C films though buckling / D.G. Liu, L. Zheng, J.Q. Liu, L.M. Luo, Y.C. Wu // Ceram. Int. – 2018. – Vol. 44. – P. 3644–3648. DOI: 10.1016/j.ceramint.2017.11.115

14. Hutchinson, J.W. Delamination of compressed films on curved substrates / J.W. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – Vol. 49. – P. 1847–1864.

15. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks / S. Faulhaber, C. Mercer, M.-Y. Moon [et al.] // J. Mech. Phys. Solids. – 2006. – Vol. 54. – P. 1004–1028.

16. Yu, H.-H. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films / H.-H. Yu, J.W. Hutchinson // Int. J. Fract. – 2002. – Vol. 113. – P. 39–55.

17. Гольдштейн, Р.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия / Р.В. Гольдштейн, К.Б. Устинов, А.В. Ченцов // Вычисл. Мех. Спл. Сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 48–57.

18. Ustinov, K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coat- ings / K.B. Ustinov // Engineering Failure Analysis. – 2015. – P. 1–7. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2013.09.022

19. Устинов, К.Б. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия / К.Б. Устинов, Е.А. Каспарова // Деформация и разрушение материалов. – 2015. – № 3. – С. 28–35.

20. Ustinov, K.B. On Combined Influence of Substrate Curvature and Compliance on Parameters of Coating Delamination from a Cylindrical Base / K.B. Ustinov, D.V. Gandilyan // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58(2). – P. 240–258.

21. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.

22. Sanders, J.L. Nonlinear theories for thin shells / J.L. Sanders // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. XXI, no. 1. – P. 21–36.

23. Григоренко, Я.М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. – Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1983. – 286 с.

24. Власов, В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек / В.З. Власов. – М.: Издательство АН СССР, 1962. – Т. I. – 528 с.

25. Ustinov, K.B. On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers / K.B. Ustinov, R. Massabo // International Journal of Solids and Structures. – 2022. – Vol. 248. – P. 11–16. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2022.111600

26. Malyshev, B.M. The strength of adhesive joints using the theory of crack / B.M. Malyshev, R.L. Salganik // Int. J. Fracture Mechanics. – 1965. – Vol. 1, no. 2. – P. 114–128.

27. Дыскин, А.В. Модель дилатансии хрупких материалов с трещинами при сжатии / А.В. Дыскин, Р.А. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 6. – С. 169–178.

28. Ustinov, K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer / K.B. Ustinov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 50, no. 1. – P. 62–80.

29. Устинов, К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости для некоторого класса различных упругих свойств / К.Б. Устинов // Препринт ИПМех РАН. – 2013. – № 1048. – 50 с.

30. Салганик, Р.Л. Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) / Р.Л. Салганик, К.Б. Устинов // Известия РАН МТТ. – 2012. – № 4. – С. 50–62.

31. Устинов, К.Б. О сдвиговом отслоении тонкого слоя от полуплоскости / К.Б. Устинов // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – № 6. – С. 141–152.

32. Ustinov, K.B. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer / K.B. Ustinov // Eur. J. Mech. A. Solids. – 2019. – Vol. 75. – P. 56–69.

References

1. Ustinov K.B., Gandilyan D.V. Deformirovanie tonkoj plenki posle uteri kontakta s cilindricheskim osnovaniem; otsloenie, raspolozhennoe v osevom napravlenii [Deformation of a thin film after contact loss with a cylindrical base axial delamination]. PNRPU Mechanics Bulletin, 2023, No. 5, pp. 159-172. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.11

2. Gol'dshtein R.V., Osipenko N.M. Ostloenie pokrytii pod deistviem termouprugikh napriazhenii (balochnoe priblizhenie) [Delamination of the coating under the action of thermoelastic stresses (beam approximation)]. *Vestnik SamGU-Estestvennonauchnaia seriia*, 2007, № 4(54), pp. 66 – 83.

3. Kachanov L.M. Delamination Buckling of Composite Materials (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988)).

4. Li S., Wang J.Z., and Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials. *J. Mech. Phys. Solid*, 2004, Vol. 52. № 1, pp. 193–214.

5. Andrews M., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. *Eng. Fract. Mech.*, 2007, Vol. 74. № 17, pp. 2700–2720.

6. Thouless M.D. Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials. *Eng. Fract. Mech.*, 2018, Vol. 191, pp. 153–167.

7. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. California: Advances in Applied Mechanics edited by J. W. Hutchinson and T. Y. Wu. 1992. 191 p.

8. Balint D.S., Hutchinson J.W., Mode II Edge Delamination of Compressed Thin Films. *J. Appl. Mech.*, 2001, Vol. 68, pp. 725-730. doi: 10.1115/1.1388012

9. Lagunegrand L., Lorriot T., Harry R., Wargnier H., Quenisset J.M. Initiation of free-edge delamination in composite laminates. *Compos. Sci. Technol.*, 2006, Vol. 66, pp. 1315–1327. doi: 10.1016/j.compscitech.2005.10.010

10. Hutchinson J.W., He M.Y., Evans A.G. The influence of imperfections on the nucleation and propagation of buckling driven delaminations. *J. Mech. Phys. Solids*, 2000, Vol. 48, pp. 709-734. doi: 10.1016/S0022-5096(99)00050-2

11. Evans A.G., Hutchinson J.W. The mechanics of coating delamination in thermal gradients. *Surface and Coatings Technology*, 2007, Vol. 201, pp. 7905-7916.

12. Malerba C., Valentini M., Azanza R.C.L., Rinaldi A., Mittiga A. Blistering in Cu2ZnSnS4 thin films: correlation with residual stresses. *Mater. Design*, 2016, Vol. 108, 16 p. doi: 10.1016/j.matdes.2016.07.019

13. Liu D.G., Zheng L., Liu J.Q., Luo L.M., Wu Y.C. Residual stress relief of hard a-C films though buckling. *Ceram. Int.*, 2018, Vol. 44, pp. 3644-3648. doi: 10.1016/j.ceramint.2017.11.115

14. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates. *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, Vol. 49, pp. 1847–1864.

15. Faulhaber S., Mercer C., Moon M.-Y. et. al. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks. *J. Mech. Phys. Solids*, 2006, Vol. 54, pp. 1004 –1028.

16. Yu H.-H., Hutchinson J. W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.*, 2002, Vol. 113, pp. 39–55.

17. Goldshtejn R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V. Ocenka vlijanija podatlivosti podlozhki na naprjazhenija poteri ustojchivosti otsloivshegosja pokrytija [Evaluation of the Effect of Substrate Compliance on Buckling Stresses of a Delaminated Coating]. *Vychisl. Meh. Spl. Sred.*, 2011, Vol. 4, № 3, pp. 48–57.

18. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings. *Engineering Failure Analysis*, 2015, pp. 1–7. doi: 10.1016/j.engfailanal.2013.09.022

19. Ustinov K.B., Kasparova E.A. Ocenka vlijanija krivizny i podatlivosti osnovanija na parametry otsloenija pokrytija [Evaluation of the influence of curvature and compliance of the base on the parameters of delamination of the coating]. *Deformacija i razrushenie materialov*, 2015, № 3, pp. 28-35.

20. Ustinov K.B., Gandilyan D.V. On Combined Influence of Substrate Curvature and Compliance on Parameters of Coating Delamination from a Cylindrical Base. *Mechanics of Solids*, 2023, Vol. 58(2), pp. 240-258.

21. Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii [Beams, slabs and shells on an elastic foundation]. M.: Gos. izd. fiz.-mat. literatury., 1960, 490 p.

22. Sanders J.L. Nonlinear theories for thin shells. *Quart. Appl. Math.*, 1963, V. XXI. № 1, pp. 21–36.

23. Grigorenko Ja.M., Mukoed A.P. Reshenie nelinejnyh zadach teorii obolochek na JeVM [Solving nonlinear problems of shell theory on a computer]. Kiev: Izdatel'skoe ob#edinenie "Vishha shkola", 1983, 286 p.

24. Vlasov V.Z. Izbrannye trudy. Obshhaja teorija obolochek. Tom I. [Selected works. General theory of shells. Volume I]. M.: Izdatel'stvo AN SSSR., 1962, 528 p.

25. Ustinov K.B., Massabo R. On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers. International *Journal of Solids and Structures*, 2022, V. 248, pp. 11–16.

26. Malyshev B.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of crack. *Int. J. Fracture Mechanics*, 1965, Vol. 1. № 2, pp. 114–128.

27. Dyskin A.V., Salganik R.A. Model' dilatansii hrupkih materialov s treshhinami pri szhatii [Model of dilatancy of brittle materials with cracks in compression]. *Mechanics of Solids*, 1987, № 6, pp. 169–178.

28. Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer. *Mechanics of Solids*, 2015, Vol. 50. № 1, pp. 62-80.

29. Ustinov K.B. Ob otsloenii sloja ot poluploskosti dlja nekotorogo klassa razlichnyh uprugih svojstv [On delamination of a layer from a half-plane for a certain class of different elastic properties]. *Preprint IPMeh RAN*, 2013, № 1048, 50 p.

30. Salganik R.L., Ustinov K.B. Zadacha ob uprugo zadelannoi plastine, modeliruiushchei chastichno otsloivsheesia ot podlozhki pokrytie (ploskaia deformatsiia) [The Problem of an Elastically Embedded Plate Modeling a Coating Partially Delaminated from the Substrate (Plane Deformation)]. *Mechanics of Solids*, 2012, № 4, pp. 50–62.

31. Ustinov K.B. O sdvigovom otsloenii tonkogo sloia ot poluploskosti [On shear separation of a thin layer from a half-plane]. *Izv. RAN MTT*, 2014, № 6, pp. 141-152.

32. Ustinov K.B. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer. *Eur. J. Mech. A. Solids*, 2019, Vol. 75, pp. 56–69.

Финансирование. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700045-7).
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора 100 %.

Funding. The work was carried out on the topic of a state assignment (state registration number 123021700045-7).
Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.
The contribution of the author 100 %.