Вельмисов, П.А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления» / П.А. Вельмисов, Ю.А. Тамарова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 2. – С. 69–78. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08

Perm Polytech Style: Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Mathematical Modeling of the Dynamics of the Aeroelastic "Pipeline – Pressure Sensor" System. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 2, pp. 69-78. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08
УДК 539.3:533.6:517.9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ АЭРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ «ТРУБОПРОВОД – ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ»

П.А. Вельмисов, Ю.А. Тамарова

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 20 ноября 2023 г.
Одобрена: 25 апреля 2024 г.
Принята к публикации:
21 мая 2024 г.

Ключевые слова:

датчик давления, трубопровод, упругий элемент, деформация, аэроупругость, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина.

АННОТАЦИЯ

Предложены математические модели механических систем «трубопровод – датчик давления», предназначенные для контроля давления рабочей среды в камерах сгорания двигателей. В таких системах для ослабления воздействия виброускорений и высоких температур датчик соединен с двигателем с помощью трубопровода и расположен на некотором расстоянии от него. Движение рабочей среды описывается линейными моделями механики жидкости и газа, для описания динамики упругого чувствительного элемента применяются линейные модели механики твердого деформируемого тела. На основе линейных дифференциальных уравнений с частными производными предложены математические постановки задач, соответствующих трехмерным моделям систем измерения давления в газожидкостных средах для некоторых форм сечения трубопровода, а именно для трубопровода с сечением прямоугольной формы, с сечением в виде сектора и в форме кольца. С помощью введения интегральных характеристик решение задач сводится к исследованию одномерных моделей. Получены уравнения, позволяющие по величине деформации чувствительного элемента датчика определять давление рабочей среды в камере сгорания в каждый момент времени. Предложены аналитические и численно-аналитические методы решения соответствующих начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений. При аналитическом подходе решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Численно-аналитическое исследование задачи основано на применении метода Галеркина. Также проведен численный эксперимент и представлены примеры расчета деформации чувствительного элемента датчика в случае жесткого закрепления при задании конкретных значений механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения избыточного давления рабочей среды в двигателе.

© **Вельмисов Петр Александрович** – д. ф.-м. н., проф. кафедры высшей математики, e-mail: velmisov@ulstu.ru.
Тамарова Юлия Александровна – соискатель кафедры высшей математики, начальник ТКБ-512 научно-исследовательского отдела 51, e-mail: kazakovaua@mail.ru.

Petr A. Velmisov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: velmisov@ulstu.ru.
Yuliya A. Tamarova – applicant, Department of High Mathematics, Head of the Thematic Complex Team 512 of the Research Department 51, e-mail: kazakovaua@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MATHEMATICAL MODELING OF THE DYNAMICS OF THE AEROELASTIC "PIPELINE – PRESSURE SENSOR" SYSTEM

P.A. Velmisov, Yu.A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 November 2023
Approved: 25 April 2024
Accepted for publication:
21 May 2024

Keywords:

pressure sensor, pipeline, elastic element, deformation, aeroelasticity, dynamics, differential equations, Galerkin method.

ABSTRACT

This paper proposes mathematical models of mechanical systems "pipeline – pressure sensor" designed to control the pressure of the working medium in the combustion chambers of engines. In such systems, to mitigate the impact of vibration accelerations and high temperatures, the sensor is connected to the engine using a pipeline and is located at some distance from it. The movement of the working medium is described by linear models of fluid and gas mechanics. To describe the dynamics of an elastic sensitive element, linear models of the mechanics of a solid deformable body are used. Based on linear differential equations with partial derivatives, mathematical formulations of problems are proposed that correspond to three-dimensional models of pressure measurement systems in gas-liquid media for some pipeline cross-sectional shapes, namely, for a pipeline with a rectangular cross-section, with a section in the form of a sector and in the form of a ring. By introducing integral characteristics, the solution of problems is reduced to studying one-dimensional models. Equations have been obtained that make it possible to determine the pressure of the working medium in the combustion chamber at each moment of time by the value of deformation of the sensitive element of the sensor. Analytical and numerical-analytical methods for solving the corresponding initial-boundary value problems for systems of differential equations are proposed. In the analytical approach, the solution of the problem is reduced to solving a differential equation with a deviating argument. The numerical-analytical study of the problem is based on the application of the Galerkin method. Also, a numerical experiment was carried out and examples of calculating the deformation of the sensitive element of the sensor in the case of rigid fastening when specifying specific values of the mechanical parameters of the system are presented, also during setting the law of change in the excess pressure of the working medium in the engine.

Введение

Первичным звеном приборного оборудования для измерения давления газожидкостной среды является датчик. Принципы работы датчиков давления, их технические характеристики, а также современное состояние гибких датчиков давления и их практическое применение описываются, например, в работах [1–11]. В частности, в работах [3; 4] исследуется движение манометрической трубчатой пружины, совершающей колебания в плоскости кривизны центральной оси в вязкой среде. В работе [9] обобщены результаты исследования высокочувствительного датчика давления, изготовленного на основе микроэлектромеханических систем (МЭМС). Работы [10–11] посвящены математическому моделированию и исследованию диагностики распределения давления и импульсного сканирования по длине трехфазного пьезоэлектролюминесцентного оптоволоконного датчика.

Для ослабления воздействий виброускорений и высоких температур датчик соединяется с рабочей камерой сгорания двигателя с помощью трубопровода. В связи с этим при проектировании систем измерения давления возникает проблема исследования динамики и устойчивости совместных колебаний деформируемого элемента датчика и рабочей среды в трубопроводе. Подобный анализ особенно необходим для изучения поведения системы при нестационарном режиме работы двигателя (например, при взлете или посадке самолета, при возникновении пульсирующего режима работы двигателя и т.д.). В частности, задача состоит в получении и исследовании уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика и предназначенных по величине деформации чувствительного элемента рассчитать давление в двигателе. Исследованию динамики и устойчивости трубопроводов и их элементов при движении внутри них жидкости или газа посвящены работы [12–16] и многие другие. В работе [17] проведено исследование математической модели системы «трубопровод – датчик давления» для осесимметричной трубы в случае несжимаемости рабочей среды. Математическое моделирование совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и сжимаемой рабочей среды в трубопроводе на основе одномерной и плоской двумерной моделей проводилось в работах [18; 19].

В настоящей работе исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе на основе математических моделей, представляющих собой начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений. Предполагается, что рабочая среда идеальная и сжимаемая. Предложены трехмерные модели с разными сечениями трубопровода: прямоугольник, сектор, кольцо. Использование трубопроводов с различными сечениями предназначено для обеспечения наибольшей эффективности

охлаждения рабочей среды за счет увеличения площади поверхности контакта трубопровода с внешней охлаждающей средой (за счет увеличения периметра сечения трубопровода). Введение интегральных характеристик основных величин динамических систем позволило значительно упростить решение задач за счет сведения трехмерных задач к одномерным, исследование которых реализовано двумя способами: аналитическое исследование, приводящее к решению уравнения с отклоняющимся аргументом, и численно-аналитическое исследование на основе метода Галеркина. С помощью программного комплекса [20] проведены численные эксперименты и построены графики деформации чувствительного элемента датчика.

1. Исследование динамики системы для трубопровода с сечением прямоугольной формы

В принципиальной схеме механической системы «трубопровод – датчик давления» на одном конце трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) $x = 0$ задан закон изменения давления рабочей среды, а на другом ($x = l$) расположен датчик, предназначенный для измерения этого давления и содержащий в качестве составной части чувствительный упругий элемент в виде пластины (рис. 1).

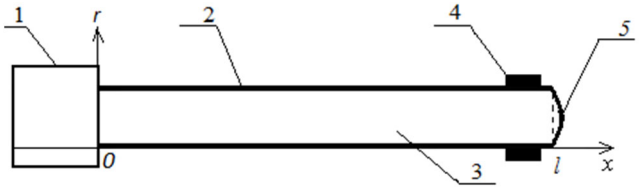
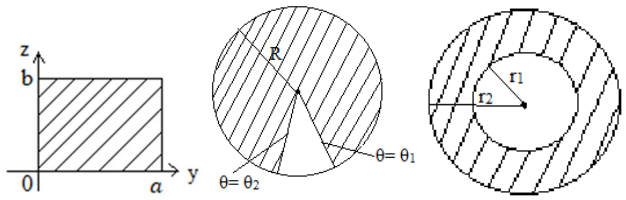


Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления»: *1* – двигатель; *2* – трубопровод; *3* – рабочая среда; *4* – датчик; *5* – упругий элемент датчика

Fig. 1. Diagram of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”: *1* – engine; *2* – pipeline; *3* – working medium; *4* – sensor; *5* – elastic element of the sensor

В данном случае исследуются механические системы «трубопровод – датчик давления» для трех форм сечения трубопровода (рис. 2).



a *b* *c*

Рис. 2. Формы сечения трубопровода: *a* – прямоугольник; *b* – сектор; *c* – кольцо

Fig. 2. Pipeline cross-sectional shapes: *a* – rectangle; *b* – sector; *c* – ring

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей модели системы «трубопровод – датчик давления» для трубопровода с сечением *C* прямоугольной формы (см. рис. 2, *a*), имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2\left(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}\right), \quad x \in (0,l), \quad y \in (0,a), \quad z \in (0,b), \tag{1}$$

$$\varphi_y(x,0,z,t) = \varphi_y(x,a,z,t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad z \in (0,b) \tag{2}$$

$$\varphi_z(x,y,0,t) = \varphi_z(x,y,b,t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad y \in (0,a) \tag{3}$$

$$\varphi_x(l,y,z,t) = w_t(y,z,t), \ y \in (0,a), \ z \in (0,b), \tag{4}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0,y,z,t) = P(y,z,t), \ y \in (0,a), \ z \in (0,b), \tag{5}$$

$$L(w(y,z,t)) \equiv mw_{tt} + D\Delta^2 w + N\Delta w + \beta\left(\Delta^2 w\right)_t + f(w_t,w) = P_0 - \rho_0\varphi_t(l,y,z,t) - P_*, \ y \in (0,a), \ z \in (0,b), \tag{6}$$

где $\Delta w = w_{yy} + w_{zz}$, $\Delta^2 w = w_{yyyy} + 2w_{yyzz} + w_{zzzz}$.

В (1)–(6) $\varphi(x,y,z,t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе; $w(y,z,t)$ – деформация упругого элемента (прямоугольной пластины), расположенного в конце трубопровода $x = l$; $P(y,z,t)$ – заданный закон изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания) $x = 0$; ρ_0, P_0, a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; $m = \rho_{pl}h_{pl}$ – погонная масса упругого элемента с плотностью ρ_{pl} и толщиной h_{pl}; $D = \dfrac{Eh_{pl}^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость упругого элемента, где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона; N – сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β – коэффициент внутреннего демпфирования; $f(w,w_t)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации w и скорости деформации w_t, характеризующая упругие и демпфирующие свойства внешней связи (например, постели); индексы x, y, z, t снизу обозначают частные производные по координатам x, y, z и времени t.

Уравнение (1) описывает движение рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе с сечением прямоугольной формы; (2)–(4) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (6) описывает динамику упругого элемента, при этом оператор $L(w)$ может быть дополнен, в зависимости от выбранной модели деформирования, линейными или нелинейными интегральными

членами (например, при учете вязкоупругих свойств материала пластины или при учете нелинейности растягивающих усилий, возникающих в процессе деформирования). Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x,y,z,t)$, $w(y,z,t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для $w(y,z,t)$, соответствующими типу закрепления упругого элемента.

Один из способов решения задачи (1)–(6) основан на введении интегральных характеристик основных величин динамической системы

$$\Phi(x,t)=\iint\limits_C \varphi(x,y,z,t)dS,\quad \xi(t)=\iint\limits_C w(y,z,t)dS,$$
$$G(t)=\iint\limits_C P(y,z,t)dS,\quad Q(t)=\iint\limits_C L(w(y,z,t))dS, \tag{7}$$

где область интегрирования $C=\{(y,z): 0\le y\le a;\ 0\le z\le b\}$, $dS=dydz$.

Положим $L(w(y,z,t))=mw_{tt}+D\Delta^2 w+N\Delta w+\beta\left(\Delta^2 w\right)_t+$ $+\alpha w_t+\gamma w$ (α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи), $w(y,z,t)=\theta(t)g(y,z)$, где функция $g(y,z)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента.

Тогда $\xi(t)=w_0\theta(t)$, $Q(t)=m_0\ddot\theta(t)+\alpha_0\dot\theta(t)+\gamma_0\theta(t)$, где

$$m_0=m\iint\limits_C g(y,z)dS,$$
$$\alpha_0=\alpha\iint\limits_C g(y,z)dS+\beta\iint\limits_C \Delta^2 g(y,z)dS,$$
$$\gamma_0=D\iint\limits_C \Delta^2 g(y,z)dS+N\iint\limits_C \Delta g(y,z)dS+$$
$$+\gamma\iint\limits_C g(y,z)dS,\ w_0=\iint\limits_C g(y,z)dS.$$

Интегрируя (1), (4)–(6) по области C с учетом граничных условий (2), (3), получим

$$\Phi_{tt}-a_0^2\Phi_{xx}=0, \tag{8}$$

$$\Phi_x(l,t)=w_0\dot\theta(t), \tag{9}$$

$$-\rho_0\Phi_t(0,t)=G(t), \tag{10}$$

$$(P_0-P_*)S-\rho_0\Phi_t(l,t)=m_0\ddot\theta(t)+\alpha_0\dot\theta(t)+\gamma_0\theta(t), \tag{11}$$

где точка сверху соответствует производной по времени. Таким образом, решение задачи сведено к исследованию одномерной системы дифференциальных уравнений для $\Phi(x,t)$ и $\theta(t)$.

Предложены и реализованы несколько способов исследования системы (8)–(11).

1. Аналитическое исследование системы (8)–(11).

Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$\Phi(x,t)=A\left(t-\tfrac{x}{a_0}\right)+B\left(t+\tfrac{x}{a_0}\right). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9)–(11), получим

$$-\rho_0\left[A'(t)+B'(t)\right]=G(t). \tag{13}$$

$$-A'\left(t-\frac{l}{a_0}\right)+B'\left(t+\frac{l}{a_0}\right)=a_0w_0\dot\theta(t) \tag{14}$$

$$(P_0-P_*)S-\rho_0\left[A'\left(t-\frac{l}{a_0}\right)+B'\left(t+\frac{l}{a_0}\right)\right]=$$
$$=m_0\ddot\theta(t)+\alpha_0\dot\theta(t)+\gamma_0\theta(t). \tag{15}$$

Штрихи обозначает производные по аргументам, от которых зависят функции $A(t)$, $B(t)$. Из (14), (15) находим $A'(t)$, $B'(t)$ и, подставляя их в (13), получим дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее функцию $\theta(t)$, характеризующую деформацию чувствительного элемента датчика, с функцией $G(t)$, характеризующей закон изменения давления рабочей среды в двигателе

$$m_0\left[\ddot\theta\left(t-\tfrac{l}{a_0}\right)+\ddot\theta\left(t+\tfrac{l}{a_0}\right)\right]+\alpha_0\left[\dot\theta\left(t-\tfrac{l}{a_0}\right)+\dot\theta\left(t+\tfrac{l}{a_0}\right)\right]+$$
$$+\gamma_0\left[\theta\left(t-\tfrac{l}{a_0}\right)+\theta\left(t+\tfrac{l}{a_0}\right)\right]-$$
$$-\rho_0a_0w_0\left[\dot\theta\left(t-\tfrac{l}{a_0}\right)-\dot\theta\left(t+\tfrac{l}{a_0}\right)\right]=2\left[G(t)+(P_0-P_*)S\right]. \tag{16}$$

Если $\frac{l}{a_0}=\varepsilon$ – малый параметр (например, если $a_0=343$, $l=3$, то $\varepsilon<0{,}01$), то можно получить приближенное уравнение, связывающее $\theta(t)$ и $G(t)$

$$(m_0+\rho_0w_0l)\ddot\theta(t)+\alpha_0\dot\theta(t)+\gamma_0\theta(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\left(m_0+\frac{1}{3}\rho_0w_0l\right)\theta^{(4)}(t)+\alpha_0\ddot\theta(t)+\gamma_0\ddot\theta(t)\right]+$$
$$+O\left(\varepsilon^4\right)=G(t)+(P_0-P_*)S. \tag{17}$$

Решения линейного дифференциального уравнения (17) с постоянными коэффициентами строятся как численно, так и аналитически, в частности, было проведено исследование резонансных явлений в случае пульсирующего давления в камере сгорания.

2. Метод Галеркина.

А. Потенциал скорости $\Phi(x,t)$ представляется в виде отрезка ряда по полной на интервале $(0,l)$ системе функций $g_m(x)=\sin\lambda_m x$, удовлетворяющих однородным граничным условиям $g_m(0)=0$, $g_m(l)=0$, соответствующим условиям (10), (11)

$$\Phi(x,t)=a(t)+b(t)x+\sum_{m=1}^{M}z_m(t)\sin\lambda_m x,\quad \lambda_m=\frac{\pi m}{l}. \tag{18}$$

Удовлетворяя условиям (10), (11), находим

$$\dot a=-\frac{1}{\rho_0}G(t),\quad \dot b=-\frac{1}{\rho_0 l}((P_*-P_0)S+Q(t)-G(t)). \tag{19}$$

Подставляя (18), (19) в (8), (9), получим

$$\sum_{m=1}^{M}\left[\ddot{z}_m(t)+a_0^2\lambda_m^2 z_m(t)\right]\sin\lambda_m x = \\ =\frac{1}{\rho_0}\dot{G}(t)+\frac{x}{\rho_0 l}(\dot{Q}(t)-\dot{G}(t)), \tag{20}$$

$$(P_*-P_0)S+Q(t)-G(t)- \\ -\rho_0 l\sum_{m=1}^{M}\dot{z}_m(t)\lambda_m\cos\lambda_m l+\rho_0 l w_0\ddot{\theta}(t)=0. \tag{21}$$

Согласно методу Галеркина, выполняя условие ортогональности невязки уравнения (20) к базисным функциям $\{\sin\lambda_k x\}_{k=\overline{1,M}}$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{z}_k(t)+a_0^2\lambda_k^2 z_k(t)=\frac{2}{l\rho_0}\dot{G}(t)\int_0^l\sin\lambda_k x dx+ \\ +\frac{2}{\rho_0 l^2}\left(\dot{Q}(t)-\dot{G}(t)\right)\int_0^l x\sin\lambda_k x dx,\quad k=1\div M. \tag{22}$$

$$\dot{Q}(t)-\dot{G}(t)-\rho_0 l\sum_{m=1}^{M}\ddot{z}_m(t)\lambda_m\cos\lambda_m l+\rho_0 l w_0\ddot{\theta}(t)=0. \tag{23}$$

Эта связанная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\theta(t)$, $z_k(t)$, $k=1\div M$ служит основой для проведения численного эксперимента.

Б. Представим потенциал скорости $\Phi(x,t)$ в виде отрезка ряда по полной на интервале $(0,l)$ системе функций $g_m(x)=\sin\nu_m x$, удовлетворяющих однородным граничным условиям $g_m(0)=0,\ g_m'(l)=0,$ соответствующим условиям (9), (10)

$$\Phi(x,t)=a(t)+b(t)x+\sum_{m=1}^{M}z_m(t)\sin\nu_m x,\ \nu_m=\frac{(2m-1)\pi}{2l}. \tag{24}$$

Удовлетворяя условиям (9), (10), находим

$$\dot{a}=-\frac{1}{\rho_0}G(t),\ \ \dot{b}=w_0\dot{\theta}(t). \tag{25}$$

Подставляя (24), (25) в (8), (11), получим

$$\sum_{m=1}^{M}\left[\ddot{z}_m(t)+a_0^2\nu_m^2 z_m(t)\right]\sin\nu_m x=\frac{1}{\rho_0}\dot{G}(t)-w_0\ddot{\theta}(t)x. \tag{26}$$

$$G(t)-\rho_0\sum_{m=1}^{M}\dot{z}_m(t)\sin\nu_m l-\rho_0 l w_0\ddot{\theta}(t)=(P_*-P_0)S+Q(t). \tag{27}$$

Записывая условие ортогональности невязки уравнения (26) к базисным функциям $\{\sin\nu_k x\}_{k=\overline{1,M}}$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{z}_k(t)+a_0^2\nu_k^2 z_k(t)=\frac{2}{l\rho_0\nu_k}\dot{G}(t)-2w_0\ddot{\theta}(t)\frac{\sin\nu_k l}{l\nu_k^2},\quad k=1\div M. \tag{28}$$

$$\dot{G}(t)-\rho_0 l\sum_{m=1}^{M}\ddot{z}_m(t)\sin\nu_m l-\rho_0 l w_0\ddot{\theta}(t)=\dot{Q}(t). \tag{29}$$

Система (28)–(29), содержащая $(M+1)$ уравнение, служит для определения $(M+1)$-й функции $\theta(t)$, $z_k(t)$, $k=1\div M$ и решалась численно.

С помощью пакета Mathematica 12.0 разработан программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [20]. Он включает в себя численное решение задачи Коши для уравнения (17), а также решения задач Коши для систем уравнений (22)–(23) и (28)–(29). Программный комплекс предназначен для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющем камеру сгорания двигателя с датчиком, и позволяет получать графики функции $\theta(t)$ отклонения подвижного элемента датчика при различном задании механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения давления рабочей среды в двигателе.

Пример 1. Рабочая среда – воздух ($\rho_0=1,2$), материал пластины – алюминий ($E=7\cdot10^{10}$, $\rho_{pl}=2,7\cdot10^3$). Параметры системы: $P_0=101325$, $P_*=0$, $a_0=343$ (при температуре 20 °C), $l=3$, $h_{pl}=0,0005$, $m=\rho_{pl}h_{pl}=1,35$, $\nu=0,34$, $D=\dfrac{Eh_{pl}^3}{12(1-\nu^2)}=0,825$, $a=0,01$, $b=0,01$, $\alpha=0,2$, $\gamma=0,3$, $\beta=0,1$, $N=0$ (все значения приведены в системе СИ).

Используя программный комплекс, получены графики деформации упругого элемента датчика при различных заданиях закона изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод $P(z,y,t)$ в случае жесткого защемления (рис. 3). Начальные условия для решения уравнения (17) заданы в виде: $\theta(0)=\dot{\theta}(0)=\ddot{\theta}(0)=\dddot{\theta}(0)=0$. При решении систем (22)–(23), (28)–(29) начальные условия следующие: $\theta(0)=\dot{\theta}(0)=\ddot{\theta}(0)=0$, $z_k(0)=\dot{z}_k(0)=0$, $k=1\div M$. Также задана функция $g(y,z)=(y-a)^2\cdot(z-b)^2$, которая удовлетворяет условиям $g(a,z)=g_y(a,z)=g(y,b)=g_z(y,b)=0$.

Отметим, что решение задачи (8)–(11), построенное с помощью метода Галеркина, достаточно точно согласуется с численным решением уравнения (17).

Графики *a*, *b* соответствуют случаям, когда на постоянное рабочее давление в двигателе, находящемся в стационарном режиме работы, наложены периодическое *a* или экспоненциально убывающее *b* возмущения. Графики *c*, *d* соответствуют остановке и запуску двигателя соответственно.

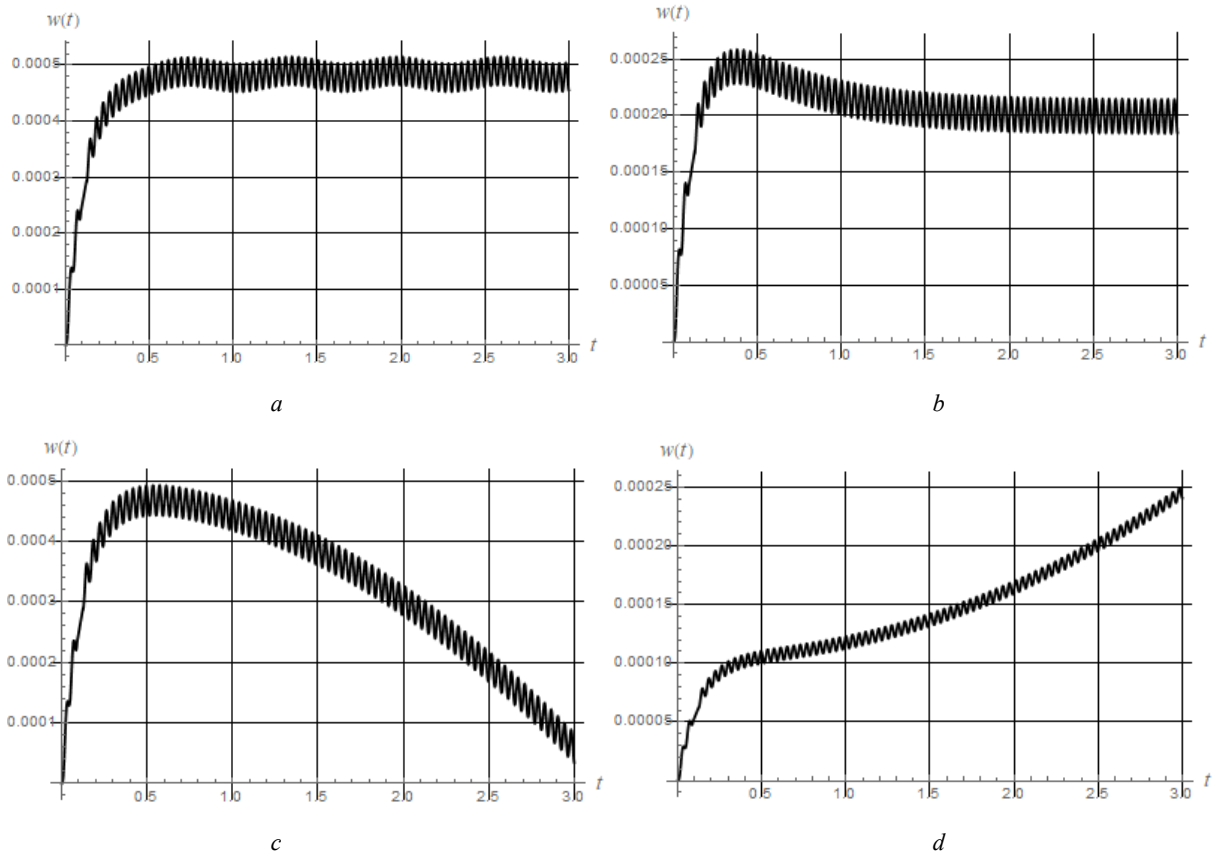


Рис. 3. Графики деформации упругого элемента датчика при $y = 0,005,\ z = 0,005$: a – $P(y,z,t) = 5\cdot 10^6 + 10^5 \cos(10t)$; b – $P(y,z,t) = 2\cdot 10^6 + 10^6 e^{-2t}$; c – $P(y,z,t) = 5\cdot 10^6 - 5,4\cdot 10^5 t^2$; d – $P(y,z,t) = 10^6 + 1,8\cdot 10^5 t$

Fig. 3. Graphs of deformation of the elastic element of the sensor when $y = 0,005,\ z = 0,005$: a – $P(y,z,t) = 5\cdot 10^6 + 10^5 \cos(10t)$; b – $P(y,z,t) = 2\cdot 10^6 + 10^6 e^{-2t}$; c – $P(y,z,t) = 5\cdot 10^6 - 5,4\cdot 10^5 t^2$; d – $P(y,z,t) = 10^6 + 1,8\cdot 10^5 t$

2. Исследование динамики системы для трубопровода с сечением в виде сектора

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей трехмерной модели системы «трубопровод – датчик давления» в цилиндрических координатах для трубопровода с поперечным сечением в виде сектора, имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2\left(\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}\right), \quad x \in (0,l),\ r \in (0,R),\ \theta \in (\theta_1,\theta_2), \tag{30}$$

$$\varphi_r(x,R,\theta,t) = 0,\ x \in (0,l),\ \theta \in (\theta_1,\theta_2), \tag{31}$$

$$\varphi_\theta(x,r,\theta_k,t) = 0,\ k = 1,2,\ x \in (0,l),\ r \in (0,R), \tag{32}$$

$$\varphi_x(l,r,\theta,t) = w_t(r,\theta,t),\ r \in (0,R),\ \theta \in (\theta_1,\theta_2), \tag{33}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0,r,\theta,t) = P(r,\theta,t),\ r \in (0,R),\ \theta \in (\theta_1,\theta_2), \tag{34}$$

$$L(w(r,\theta,t)) \equiv mw_{tt} + D\Delta^2 w + N\Delta w + \beta\left(\Delta^2 w\right)_t + f(w_t,w) = P_0 - \rho_0\varphi_t(l,r,\theta,t) - P_*,\quad r \in (0,R),\quad \theta \in (\theta_1,\theta_2), \tag{35}$$

где $\Delta w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$,

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

В (30)–(35) $\varphi(x,r,\theta,t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с поперечным сечением в виде сектора (см. рис. 2, *b*), образованного лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и окружностью $r = R$; $w(r,\theta,t)$ – деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода $x = l$; $P(r,\theta,t)$ – заданный закон изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; R – радиус трубопровода и упругого элемента, представляющего собой деформируемую пластину, имеющую так же, как и поперечное сечение трубопровода, форму сектора, ограниченного прямыми $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и окружностью $r = R$ радиуса *R*.

Уравнение (30) описывает движение идеального газа в трубопроводе с поперечным сечением в виде сектора; (31)–(33) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (34) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (35) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x,r,\theta,t)$, $w(r,\theta,t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для $w(r,\theta,t)$ при $r=R$, $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$, соответствующие типу закрепления элемента. Для жесткого защемления условия имеют вид:

$$w(R,\theta,t)=w_r(R,\theta,t)=0,\ w(r,\theta_1,t)=w_\theta(r,\theta_1,t)=0,$$

$$w(r,\theta_2,t)=w_\theta(r,\theta_2,t)=0. \qquad (36)$$

Для решения задачи (30)–(35) введем интегральные характеристики основных величин динамической системы

$$\Phi(x,t)=\iint_H \varphi(x,r,\theta,t)rdrd\theta,\quad \xi(t)=\iint_H w(r,\theta,t)rdrd\theta,$$
$$G(t)=\iint_H P(r,\theta,t)rdrd\theta,\qquad Q(t)=\iint_H L(w(r,\theta,t))rdrd\theta,$$

где область интегрирования $H=\{(r,\theta):0\le r\le R;\ \theta_1\le\theta\le\theta_2\}$. Интегрируя (30)–(35) по области H и выбирая $L(w(r,\theta,t))=mw_{tt}+D\Delta^2w+N\Delta w+\beta\left(\Delta^2w\right)_t+\alpha w_t+\gamma w$, получим

$$\Phi_{tt}-a_0^2\Phi_{xx}=0, \qquad (37)$$

$$\Phi_x(l,t)=w_0\dot\psi(t), \qquad (38)$$

$$-\rho_0\Phi_t(0,t)=G(t), \qquad (39)$$

$$(P_0-P_*)\frac{R^2(\theta_2-\theta_1)}{2}-\rho_0\Phi_t(l,t)=m_0\ddot\psi(t)+\alpha_0\dot\psi(t)+\gamma_0\psi(t). \qquad (40)$$

В (37)–(40) введены обозначения

$$m_0=m\iint_H g(r,\theta)rdrd\theta,$$
$$\alpha_0=\alpha\iint_H g(r,\theta)rdrd\theta+\beta\iint_H\Delta^2g(r,\theta)rdrd\theta,$$
$$w_0=\iint_H rg(r,\theta)drd\theta,\ \gamma_0=D\iint_H\Delta^2g(r,\theta)rdrd\theta+$$
$$+N\iint_H\Delta g(r,\theta)rdrd\theta+\gamma\iint_H g(r,\theta)rdrd\theta,$$

при этом $w(r,\theta,t)=\psi(t)g(r,\theta)$, где функция $g(r,\theta)$ удовлетворяет граничным условиям (36).

Исследование задачи (37)–(40) проводилось аналогично решению задачи (8)–(11).

При аналитическом способе решения задачи (37)–(40) приходим к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего функцию $\psi(t)$, характеризующую деформацию чувствительного элемента датчика, с функцией $G(t)$, характеризующей закон изменения давления рабочей среды в двигателе

$$\begin{aligned}&m_0\left[\ddot\psi\left(t-\tfrac{l}{a_0}\right)+\ddot\psi\left(t+\tfrac{l}{a_0}\right)\right]+\alpha_0\left[\dot\psi\left(t-\tfrac{l}{a_0}\right)+\dot\psi\left(t+\tfrac{l}{a_0}\right)\right]+\\&+\gamma_0\left[\psi\left(t-\tfrac{l}{a_0}\right)+\psi\left(t+\tfrac{l}{a_0}\right)\right]-\\&-\rho_0a_0w_0\left[\dot\psi\left(t-\tfrac{l}{a_0}\right)-\dot\psi\left(t+\tfrac{l}{a_0}\right)\right]=\\&=2\left[G(t)+(P_0-P_*)\frac{R^2(\theta_2-\theta_1)}{2}\right].\end{aligned} \qquad (41)$$

Учитывая, что $\frac{l}{a_0}=\varepsilon$ – малый параметр, получим приближенное уравнение

$$\begin{aligned}&(m_0+\rho_0w_0l)\ddot\psi(t)+\alpha_0\dot\psi(t)+\gamma_0\psi(t)+\\&+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\left(m_0+\frac{1}{3}\rho_0w_0l\right)\psi^{(4)}(t)+\alpha_0\dddot\psi(t)+\gamma_0\ddot\psi(t)\right]+\\&+O\left(\varepsilon^4\right)=G(t)+(P_0-P_*)\frac{R^2(\theta_2-\theta_1)}{2}.\end{aligned}$$

При численно-аналитическом исследовании задачи (37)–(40) с помощью метода Галеркина функция $\Phi(x,t)$ представляется в виде отрезков рядов по полным на интервале $(0,l)$ системам функций $\{z_m(x)\}$, которые удовлетворяют однородным граничным условиям, соответствующим условиям (38), (39) или (39), (40). В результате исследование сведено к решению задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\psi(t)$, $z_k(t)$, $k=1\div M$, на основе которых проведен численный эксперимент.

Пример 2. Рабочая среда – воздух ($\rho_0=1,2$), материал пластины – алюминий ($E=7\cdot10^{10}$, $\rho_{pl}=2,7\cdot10^3$). Размеры сечения, изображенного на рис. 2, *b*: $R=0,01$, $\theta_1=\frac{\pi}{8}$, $\theta_2=\frac{15\pi}{8}$. Остальные параметры системы те же, что в примере 1.

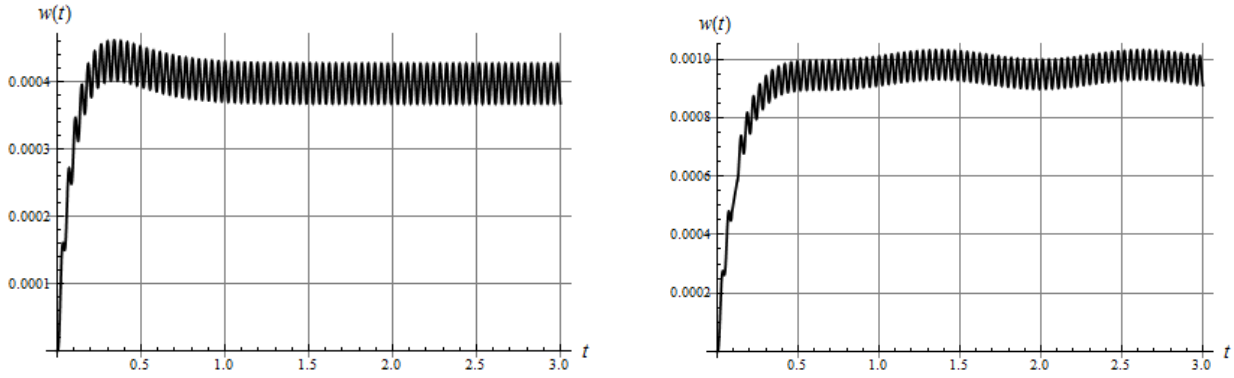
Используя программный комплекс, численно получены решения в случае жесткого защемления при различных законах изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод $P(r,\theta,t)$ (рис. 4). Начальные условия для $\psi(t)$ и $z_k(t)$, $k=1\div M$ так же, как и в примере 1, заданы нулевыми.

Функция $g(r,\theta)$, удовлетворяющая условиям (36), имеет вид:

$$g(r,\theta)=\left[1-3(r/R)^2+2(r/R)^3\right]\cdot(\theta-\theta_1)^2\cdot(\theta-\theta_2)^2.$$

Численный эксперимент для трубопровода с сечением в форме кольца

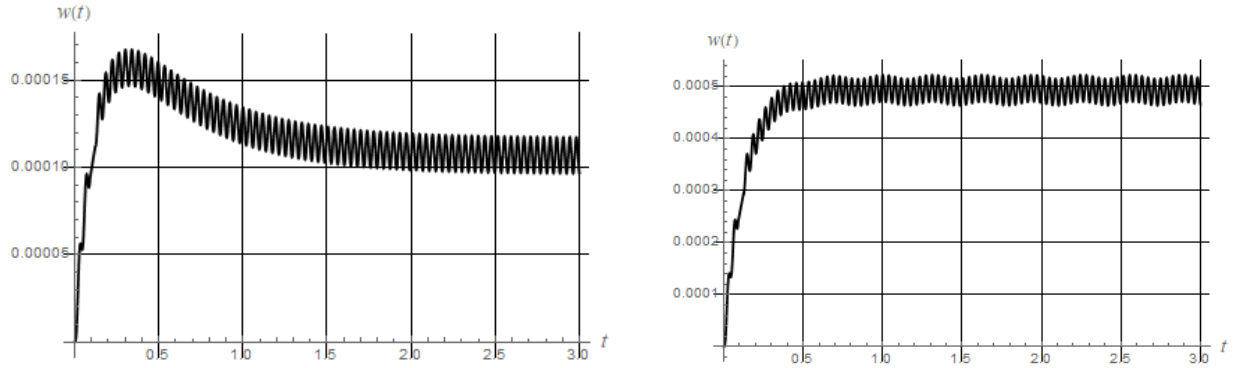
Исследование динамики системы в случае, когда сечение трубопровода и чувствительный элемент имеют форму кольца (см. рис. 2, *c*), проводилось аналогично исследованию задачи (30)–(35).



a *b*

Рис. 4. Графики деформации упругого элемента датчика при $r = 0,005$, $\theta = \pi$: *a* – $P(r,\theta,t) = 2\cdot 10^6 + 10^6 e^{-5t}$; *b* – $P(r,\theta,t) = 5\cdot 10^6 + 10^5 \cos(5t)$

Fig. 4. Graphs of deformation of the elastic element of the sensor when $r = 0.005$, $\theta = \pi$: *a* – $P(r,\theta,t) = 2\cdot 10^6 + 10^6 e^{-5t}$; *b* – $P(r,\theta,t) = 5\cdot 10^6 + 10^5 \cos(5t)$



a *b*

Рис. 5. Графики деформации упругого элемента датчика $r = 0,0075$: *a* – $P(r,t) = 10^6(1+e^{-5t})$; *b* – $P(r,t) = 5\cdot 10^6 + 10^5 \cos(20t)$

Fig. 5. Deformation graphs of the elastic element of the sensor $r = 0.0075$: *a* – $P(r,t) = 10^6(1+e^{-5t})$; *b* – $P(r,t) = 5\cdot 10^6 + 10^5 \cos(20t)$

Пример 3. Рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1,2$), материал пластины – алюминий ($E = 7\cdot 10^{10}$, $\rho_{pl} = 2,7\cdot 10^3$). Размеры сечения, изображенного на рис. 2, *c*: $r_1 = 0,01$, $r_2 = 0,025$. Остальные параметры системы те же, что в примере 1.

Для жесткого защемления задана функция $g(r,\theta) = g(r) = (r-r_1)^2\cdot(r-r_2)^2$, удовлетворяющая условиям $g(r_1) = g'(r_1) = g(r_2) = g'(r_2) = 0$. На рис. 5 представлены результаты численных расчетов при нулевых начальных условиях.

Заключение

Развитие аэрокосмической техники и технологий требует непрерывного усовершенствования, модернизации и создания новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления. Ввиду этого создание математических моделей систем измерения давления в газожидкостных средах и разработка на их основе теоретических методов исследования этих систем является актуальной задачей.

В приложении к датчикам давления речь, в частности, идет о разработке методов исследования динамики чувствительного элемента датчика с учетом взаимодействия с газожидкостной рабочей средой, при изменении давления в камере сгорания двигателя в зависимости от конструктивных особенностей механической системы «трубопровод – датчик давления». Создание такой системы, в которой трубопровод соединяет датчик с камерой сгорания двигателя, обусловливается необходимостью ослабления воздействия вибраций и высоких температур на датчик и его составные элементы.

В исследовании предложены и проанализированы математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления», позволяющие определять деформацию чувствительного элемента датчика давления в зависимости от закона изменения давления в камере сгорания.

Разработка каждой конкретной физической модели и проведение ее испытаний – сложная, дорогостоящая, требующая большого времени работа. Разработанные математические модели и методы решения задач аэрогидроупругости, а также соответствующий программный комплекс позволяют дополнить и усовершенствовать базу современного проектирования систем измерения давления в газожидкостных средах, дают возможность сократить время и средства, необходимые для натурных экспериментов, и заменить их компьютерными исследованиями.

Математические модели и результаты исследований, приведенные в статье, позволяют на этапе проектирования смоделировать динамические процессы, происходящие в системе, и на основе их анализа, а также, исходя из требуемых конструктивных характеристик реальных разрабатываемых систем, подобрать оптимальные параметры механической системы, обеспечивающие необходимую точность измерения, износостойкость, прочность и т.д. (например, форму и размеры сечения трубопровода и его длину, механические и геометрические характеристики чувствительного элемента: плотность и модуль Юнга материала, толщину, форму).

Библиографический список

1. Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем / Е.М. Белозубов [и др.] // Измерительная техника. – 2011. – № 1. – С. 17–19.

2. Казарян, А.А. Универсальный датчик давления / А.А. Казарян, Г.П. Грошев // Измерительная техника. – 2008. – № 3. – С. 26–30.

3. Пирогов, С.П. Манометрические трубчатые пружины / С.П. Пирогов. – СПб.: Недра, 2009. – 276 с.

4. Пирогов, С.П. Теоретические основы проектирования вибростойких манометров / С.П. Пирогов, Д.А. Черенцов // Измерительная техника. – 2016. – № 8. – С. 38–41.

5. Эткин, Л.Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика / Л.Г. Эткин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 407 с.

6. Chen, J. Flexible Pressure Sensors and Their Applications / J. Chen // Highlights in Science, Engineering and Technology. – 2023. – Vol. 44. – P. 54–60. DOI: 10.54097/hset.v44i.7193

7. Hou, Xing-Yu. Sensing mechanisms and applications of flexible pressure sensors / Hou, Xing-Yu, Guo, Chuan-Fei // Acta Physica Sinica. – 2020. – Vol. 69(17). – P. 178102. DOI: 10.7498/aps.69.20200987

8. Emerging Technologies of Flexible Pressure Sensors: Materials, Modeling, Devices, and Manufacturing / Y. Huang, X. Fan, S. Chen [et al.] // Advanced Functional Materials. – 2019. – Vol. 29, iss. 12. – P. 1808509. doi: 10.1002/adfm.201808509.

9. Basov, Mikhail, Prigodskiy, Denis. Investigation of sensitive element for pressure sensor based on bipolar piezotransistor. – 2021. DOI: 10.21203/rs.3.rs-677129/v1

10. Паньков, А.А. Математическое моделирование пьезоэлектролюминесцентного эффекта и диагностика распределения давления по длине оптоволоконного датчика / А.А. Паньков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 289–302. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.17

11. Паньков, А.А. Математическая модель импульсного сканирования давления по длине пьезоэлектролюминесцентного оптоволоконного датчика / А.А. Паньков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 1. – С. 73–82. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.06

12. Paidoussis, M.P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics / M.P. Paidoussis // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – No. 3 (310). – P. 462–492.

13. Kheiri, M. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow / M. Kheiri, M.P. Paidoussis // Journal of Fluids and Structures. – 2015. – Vol. 55. – P. 204–217.

14. Aulisa, E. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid / E. Aulisa, A. Ibragimov, E.Y. Kaya-Cekin // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S. – 2014. – Vol. 7, no. 6. – P. 1133–1148.

15. Gatica, G.N. Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D / G.N. Gatica, N. Heuer, S. Meddahi // Numer. Methods Partial Differ. Equations 30. – 2014. – № 4. – P. 1211–1233.

16. Tian, Fang-Bao. FSI modeling with the DSD/SST method for the fluid and finite difference method for the structure / Fang-Bao Tian // Comput. Mech. – 2014. – Vol. 54, no. 2. – P. 581–589.

17. Velmisov, P. Mathematical modelling of the "Pipeline – pressure sensor" system / P. Velmisov, Yu.V. Pokladova // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1353. – P. 012085. DOI: 10.1088/1742-6596/1353/1/012085

18. Velmisov, P.A. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media / P.A. Velmisov, Y.A. Tamarova, Y.V. Pokladova // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol. 2333. – P. 120004. DOI: 10.1063/5.0041778

19. Velmisov, P.A. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems / P.A. Velmisov, Y.A. Tamarova, Y.V. Pokladova // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2021. – Vol. 255(5). – P. 587–594. DOI: 10.1007/s10958-021-05395-2

20. Тамарова, Ю.А. Комплекс программ для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления»; свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022615319 / Ю.А. Тамарова, П.А. Вельмисов, А.В. Анкилов. – 30.03.2022, заявка №2022615014 от 28.03.2022.

References

1. Proektirovanie uprugih jelementov nano- i mikrojelektromehanicheskih sistem / E. M. Belozubov [i dr.] // Izmeritel'naja tehnika. – 2011. – №1. – S. 17-19.

2. Kazarjan A.A., Groshev G.P. Universal'nyj datchik davlenija // Izmeritel'naja tehnika. – 2008. – №3. – S. 26-30.

3. Pirogov S.P. Manometricheskie trubchatye pruzhiny. – S.Peterburg: Nedra, 2009. – 276 s.

4. Pirogov S.P., Cherencov D.A. Teoreticheskie osnovy proektirovanija vibrostojkih manometrov // Izmeritel'naja tehnika. – 2016. – №8. – S. 38-41.

5. Jetkin L.G. Vibrochastotnye datchiki. Teorija i praktika. – M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2004. – 407 s.

6. Chen, J. Flexible Pressure Sensors and Their Applications // Highlights in Science, Engineering and Technology. – 2023. – Vol. 44. – pp. 54–60. doi: 10.54097/hset.v44i.7193.

7. Hou, Xing-Yu, Guo, Chuan-Fei. Sensing mechanisms and applications of flexible pressure sensors // Acta Physica Sinica. – 2020. – 69(17). – 178102. doi: 10.7498/aps.69.20200987.

8. Huang Y, Fan X, Chen S, et al. Emerging Technologies of Flexible Pressure Sensors: Materials, Modeling, Devices, and Manufacturing // Advanced Functional Materials. – 2019. – Vol. 29, issue 12. – 1808509. doi: 10.1002/adfm.201808509.

9. Basov, Mikhail, Prigodskiy, Denis. Investigation of sensitive element for pressure sensor based on bipolar piezotransistor. – 2021. doi:10.21203/rs.3.rs-677129/v1.

10. Pan'kov A.A. Matematicheskoe modelirovanie p'ezojelektroljuminescentnogo jeffekta i diagnostika raspredelenija davlenija po dline optovolokonnogo datchika // Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Mehanika. – 2016. – №4. – S. 289-302. doi: 10.15593/perm.mech/2016.4.17.

11. Pan'kov A.A. Matematicheskaja model' impul'snogo skanirovanija davlenija po dline p'ezojelektroljuminescentnogo optovolokonnogo datchika // Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Mehanika. – 2018. – №1. – S. 73-82. doi: 10.15593/perm.mech/2018.1.06.

12. Paidoussis, Michael P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – No. 3 (310). – pp. 462–492.

13. Kheiri M., Paidoussis M.P. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow // Journal of Fluids and Structures. – 2015. – V. 55. – pp.204–217.

14. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S. – 2014. – V. 7, no. 6. – pp. 1133–1148.

15. Gatica, G.N., Heuer, N., Meddahi, S. (2014) Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D. // Numer. Methods Partial Differ. Equations 30. – 2014. – № 4. – pp. 1211-1233.

16. Tian, Fang-Bao FSI modeling with the DSD/SST method for the fluid and finite difference method for the structure // Comput. Mech. – 2014. – 54, № 2. – pp. 581-589.

17. Velmisov Petr and Pokladova Yu.V..(2019). Mathematical modelling of the "Pipeline – pressure sensor" system // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – 1353. 012085. doi: 10.1088/1742-6596/1353/1/012085.

18. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings. – 2021. – 2333. – 120004. doi: 10.1063/5.0041778.

19. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2021. – 255(5). – pp. 587-594. doi: 10.1007/s10958-021-05395-2.

20. Tamarova Ju. A., Vel'misov P. A., Ankilov A. V. Kompleks programm dlja matematicheskogo modelirovanija mehanicheskoj sistemy «truboprovod – datchik davlenija», Svidetel'stvo o registracii programmy dlja JeVM 2022615319, 30.03.2022, zajavka №2022615014 ot 28.03.2022.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00517.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with the support from the Russian Science Foundation grant No. 23-21-00517.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.