ISSN 2712-8008
Том / Volume 26 №1 2026
Домашняя страница журнала: http://vestnik.pstu.ru/geo/
НЕДРОПОЛЬЗОВАНИЕ

УДК 622.831
Статья / Article
© ПНИПУ / PNRPU, 2026

Моделирование влияния преимущественной трещиноватости на деформацию ленточных и столбчатых целиков при добыче рудных полезных ископаемых

И.А. Пантелеев, Д.В. Ложкин

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук
(Российская Федерация, 614000, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1)

Modeling the influence of predominant fracturing on the deformation of strip and columnar pillars during the extraction of ore minerals

Ivan A. Panteleev, Denis V. Lozhkin

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science
(1 Akademika Koroleva st., Perm, 614000, Russian Federation)

Получена / Received: 01.07.2025. Принята / Accepted: 08.12.2025. Опубликована / Published: 12.01.2026

Ключевые слова:
трещиноватость, анизотропия упругих свойств, зависимость свойств от вида напряженно-деформированного состояния, целик, несоосность, нелинейная модель, математическое моделирование, тензор поврежденности.

Работа посвящена численному исследованию влияния анизотропии трещиноватости на напряженно-деформированное состояние ленточных и столбчатых целиков – ключевых структурных элементов систем подземной разработки рудных месторождений. Актуальность исследования обусловлена переходом к освоению месторождений на больших глубинах в условиях высокого горного давления и наличия тектонических нарушений, где традиционные подходы, рассматривающие массив как изотропную среду, могут давать некорректные прогнозы. Для математического описания деформационного поведения трещиноватых пород использована оригинальная нелинейная модель механики поврежденной среды с тензорным параметром поврежденности второго ранга. Данная модель комплексно учитывает индуцированную трещиноватостью анизотропию упругих свойств, их зависимость от вида напряженного состояния (разномодульность), а также эффект дилатансии. Проведен сравнительный анализ деформационных характеристик для случаев изотропной и анизотропной трещиноватости при различных уровнях средней поврежденности ($\alpha = 0{,}15$ и 0,3) и для двух конфигураций нагружения, соответствующих ленточному и столбчатому целикам (одноосное и непропорциональное двухосное сжатие). Показано, что наличие преимущественной ориентации трещин существенно влияет на деформационный отклик. Наиболее значительное изменение минимальной главной деформации (до 70 % и более для поврежденности $\alpha = 0{,}3$) наблюдается при ориентации трещиноватости, квазиортогональной направлению действия минимального главного напряжения, в интервале углов $90^\circ \pm \varphi$, где φ – угол внутреннего трения породы. Установлено, что анизотропия трещиноватости приводит к несоосности тензоров напряжений и деформаций, при этом максимальный угол рассогласования не превышает 2°. Полученные результаты доказывают необходимость учета анизотропии трещиноватости для корректной оценки несущей способности целиков и проектирования устойчивых систем разработки на больших глубинах в тектонически нарушенных массивах.

Keywords:
fracturing, anisotropy of elastic properties, dependence of properties on the type of stress-strain state, pillar, misalignment, nonlinear model, mathematical modeling, damage tensor.

This paper presents a numerical study of the influence of fracturing anisotropy on the stress-strain state of banded and columnar pillars—key structural elements of underground ore deposit mining systems. The relevance of this study stems from the transition to developing deposits at great depths under conditions of high overburden pressure and the presence of tectonic faults, where traditional approaches treating the rock mass as an isotropic medium can yield incorrect predictions. A novel nonlinear model of fractured medium mechanics with a second-rank tensor damage parameter is used to mathematically describe the deformation behavior of fractured rocks. This model comprehensively accounts for the anisotropy of elastic properties induced by fracturing, their dependence on the type of stress state (different modulus), and the dilatancy effect. A comparative analysis of the deformation characteristics was performed for cases of isotropic and anisotropic fracturing at different levels of average damage ($\alpha = 0.15$ and 0.3) and for two loading configurations corresponding to strip and columnar pillars (uniaxial and disproportionate biaxial compression). It was shown that the presence of a preferred fracture orientation significantly affects the deformation response. The most significant change in the minimum principal strain (up to 70% or more for damage $\alpha = 0.3$) is observed for a fracturing orientation quasi-orthogonal to the direction of the minimum principal stress, in the angular range of $90^\circ \pm \varphi$, where φ is the angle of internal friction of the rock. It was established that fracturing anisotropy leads to misalignment of the stress and strain tensors, while the maximum misalignment angle does not exceed 2°. The obtained results prove the necessity of taking into account the anisotropy of fracturing for the correct assessment of the bearing capacity of pillars and the design of stable development systems at great depths in tectonically disturbed massifs.

Пантелеев Иван Алексеевич (Author ID in Scopus: 36842391700, ORCID: 0000-0002-7430-3667) – доктор физико-математических наук, e-mail: pia@icmm.ru. Контактное лицо для переписки.
Ложкин Денис Витальевич (Author ID in Scopus: 57266344100, ORCID: 0000-0003-3302-8408), e-mail: lozhkin.d@icmm.ru.

Ivan A. Panteleev (Author ID in Scopus: 36842391700, ORCID: 0000-0002-7430-3667) – Doctor of Science, e-mail: pia@icmm.ru. The contact person for correspondence
Denis V. Lozhkin (Author ID in Scopus: 57266344100, ORCID: 0000-0003-3302-8408), e-mail: lozhkin.d@icmm.ru.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:
Пантелеев, И.А. Моделирование влияния преимущественной трещиноватости на деформацию ленточных и столбчатых целиков при добыче рудных полезных ископаемых / И.А. Пантелеев, Д.В. Ложкин // Недропользование. – 2026. – Т.26, №1. – С. 30–37. DOI: 10.15593/2712-8008/2026.1.3

Please cite this article in English as:
Panteleev I.A., Lozhkin D.V. Modeling the influence of predominant fracturing on the deformation of strip and columnar pillars during the extraction of ore minerals. *Perm Journal of Petroleum and Mining Engineering*, 2026, vol.26, no.1, pp. 30-37. DOI: 10.15593/2712-8008/2026.1.3

Введение

Устойчивость горных выработок при подземной разработке рудных месторождений в значительной степени определяется надежностью целиков – массивов горной породы, оставляемых для поддержания вышележащих толщ [1–5]. Ленточные и столбчатые целики являются ключевыми структурными элементами систем разработки, обеспечивающими безопасность ведения горных работ, сохранность земной поверхности от сдвижений и обрушений, а также рентабельность добычи. В условиях наращивания объемов добычи и перехода к освоению месторождений на больших глубинах, где уровень горного давления существенно возрастает, задачи точной оценки несущей способности и деформационного поведения приобретают ключевое значение.

Одним из важнейших факторов, определяющих механическое поведение породных массивов, является их трещиноватость. Массив горных пород, традиционно рассматриваемый в инженерных расчетах как сплошная среда [6–8], в реальности представляет собой дискретную систему, ослабленную сетью естественных трещин и разномасштабных тектонических нарушений. Перераспределение горного давления при ведении очистных работ по любой системе разработки приводит к образованию вторичной трещиноватости, дополнительно снижающей несущую способность целиков. С точки зрения механического (деформационного) поведения целика развитая трещиноватость приводит к индуцированной анизотропии упругих и прочностных свойств слагающих его пород, зависимости упругих свойств от вида напряженно-деформированного состояния и, как следствие, изменению напряженно-деформированного состояния всего целика.

Несмотря на ключевую роль трещиноватости в формировании механического поведения горных пород, в современной практике проектирования подбор параметров целиков зачастую опирается на представление о массиве как об изотропной среде с заниженными механическими свойствами. Данное приближение игнорирует его реальную блочную структуру, обусловленную разномасштабной трещиноватостью, и может приводить к ошибочным прогнозам устойчивости целиков. В связи с этим, актуальной научно-практической задачей является разработка математических моделей, способных учитывать преимущественно-ориентированную трещиноватость массива, описывать особенности его деформационного поведения и прогнозировать несущую способность целиков различных геометрий в различных горно-геологических условиях.

Настоящая работа посвящена сравнительному анализу напряженно-деформированного состояния целиков двух типов (ленточного и столбчатого) в случае хаотичной (равновероятно ориентированной) и преимущественно ориентированной трещиноватости слагающих их скальных пород. Для описания деформационного поведения целиков используется оригинальная нелинейная модель деформирования хрупких горных пород с тензорным параметром поврежденности, разрабатываемая авторским коллективом последние несколько лет. Данная модель относится к классу моделей континуальной механики поврежденности и позволяет учитывать зависимость свойств от вида напряженно-деформированного состояния, дилатансию трещиноватой среды и индуцированную трещиноватостью анизотропию упругих свойств. В результате проведенного исследования сформулированы рекомендации по учету преимущественной ориентации трещиноватости при решении практических инженерных задач.

Нелинейная модель деформирования трещиноватых пород

Для описания деформационного поведения скальных пород, наряду с моделью линейно-упругого изотропного тела, используются различные подходы механики деформируемого твердого тела, которые можно разделить на несколько классов: модели упругих разномодульных сред и сред, свойства которых зависят от вида напряженно-деформированного состояния [9–12], модели континуальной механики поврежденности с параметрами поврежденности различного ранга [13–17], модели дискретных сред [18–27], рассматривающие породу как совокупность взаимодействующих блоков, а также неевклидовы модели сплошной среды [28–33]. Представленная классификация, безусловно, является неполной и в значительной мере отражает тот аспект деформационного поведения горных пород, на описание которого ориентирована каждая из рассматриваемых моделей. При этом все представленные классы моделей обладают своими ограничениями. Так, модели разномодульных сред, а также модели, в которых упругие свойства зависят от вида напряженно-деформированного состояния, как правило, не учитывают деградацию механических свойств с ростом приложенных напряжений и индуцированную трещиноватостью анизотропию упругих и прочностных свойств. Модели континуальной механики поврежденности, напротив, не учитывают зависимость свойств от вида напряженно-деформированного состояния. Модели дискретных сред оперируют материальными параметрами, напрямую неопределимыми в лабораторных экспериментах, а также требуют больших вычислительных мощностей. Неевклидовы модели сплошной среды имеют огромный потенциал применения для описания деформирования горных пород и горных массивов, однако их формализм в настоящее время находится на этапе активного развития и характеризуется повышенной сложностью в сравнении с классическими моделями. Решение краевых задач в неевклидовой постановке требует специализированных численных методов, что пока затрудняет активное использование данного класса моделей для решения практических задач.

В настоящей работе предлагается использовать нелинейную модель деформирования трещиноватой среды, разработанную авторами ранее [34–36]. Данная модель представляет собой обобщение на случай тензорной поврежденности неклассической нелинейной модели упругого деформирования хрупкого материала, предложенной академиком РАН В.П. Мясниковым во второй половине прошлого века и впоследствии развитой в трудах его учеников [37–44].

Для описания преимущественной трещиноватости вводится тензор поврежденности второго ранга $\widetilde{\Omega}$, главные направления которого задают ориентацию ортотропии материала, а главные значения $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ определяют изменение эффективной площади поперечных сечений, перпендикулярных к каждой из осей ортотропии. Введенный тензорный параметр позволяет описывать преимущественную ориентацию трещиноватости посредством эллипсоида поврежденности, полуоси которого равны главным поврежденностям, а их ориентация определяется соответствующими главными осями тензора $\widetilde{\Omega}$ (рис. 1).

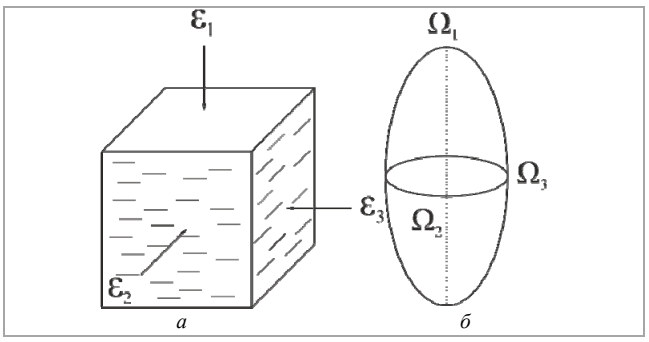


Рис. 1. Представительный объем с горизонтальной трещиноватостью (*а*) и соответствующий ей эллипсоид поврежденности (*б*)

Энергия упругой деформации хрупкой трещиноватой среды записывается в виде:

$$W(\tilde{\varepsilon},\tilde{\Omega}) = \frac{\lambda_0}{2} I_1^2 + \mu_0 I_2 + \mu_1 I_2^{(\Omega)} - \gamma I_1^{(\Omega)} \sqrt{I_2^{(\Omega)}}, \qquad (1)$$

где λ_0, μ_0 – константы Ламе; μ_1 – параметр, характеризующий деградацию упругих свойств при росте поврежденности; γ – дополнительный упругий модуль, ответственный за зависимость упругих свойств от вида напряженно-деформированного состояния; I_1, I_2 – первый и второй тензора малых деформаций соответственно; $I_1^{(\Omega)}, I_2^{(\Omega)}$ – инварианты тензора фиктивной деформации $\varepsilon_{ij}^{(\Omega)} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ik}\Omega_{kj} + \varepsilon_{jk}\Omega_{ki}\right)$, которые в случае соосности тензора малых деформаций и тензора поврежденности имеют вид $I_1^{(\Omega)} = \Omega_1\varepsilon_1 + \Omega_2\varepsilon_2 + \Omega_3\varepsilon_3$, $I_2^{(\Omega)} = \Omega_1^2\varepsilon_1^2 + \Omega_2^2\varepsilon_2^2 + \Omega_3^2\varepsilon_3^2$. Первые два слагаемых в соотношении (1) представляет собой упругую энергию исходного неповрежденного материала, третье слагаемое – энергию деформации материала с анизотропией, индуцированной поврежденностью, а четвертое слагаемое отвечает за нелинейность и разномодульность деформационного отклика среды, зависимость ее свойств от вида напряженно-деформированного состояния. В случае изотропной поврежденности, $\Omega_{ij} = \Omega\delta_{ij}$, и линейно-упругого изотропного тела ($\gamma = 0$) выражение для энергии (1) редуцируется к виду

$$W(\tilde{\varepsilon},\tilde{\Omega}) = (1-\Omega^2)\left[\frac{\lambda_0}{2} I_1^2 + \mu_0 I_2\right]. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что эффективные упругие модули, например модуль Юнга, будут определяться как $E(\Omega) = (1-\Omega^2)E_0$, что аналогично модели Ю.Н. Работнова при $\alpha = \Omega^2$ [45].

Дифференцируя потенциал (1) по компонентам тензора деформации, получим выражения для компонент тензора напряжений Коши для общего случая недиагональных тензоров деформации и поврежденности:

$$\sigma_{lm} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{lm}} = [\lambda_0 I_1 \delta_{lm} + 2\mu_0 \varepsilon_{lm}] - \gamma \frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} + \left(\mu_1 - \frac{\gamma}{2} \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}}\right) \frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}}, \qquad (3)$$

где производные от инвариантов тензора фиктивной деформации равны:

$$\frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \Omega_{lm}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \frac{1}{2}\left(\Omega_{li}\varepsilon_{ik}\Omega_{km} + \Omega_{mi}\varepsilon_{ik}\Omega_{kl}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{lj}\varepsilon_{mk}\Omega_{kj} + \Omega_{mj}\varepsilon_{lk}\Omega_{kj}\right). \qquad (5)$$

Здесь необходимо отметить особенность, присущую всем анизотропным моделям. Из выражения (3) следует, что в случае несоосных тензора поврежденности и тензора деформации тензор напряжений будет не соосен им обоим. Например, в случае диагонального тензора поврежденности в условиях простого сдвига представительного объема (когда заданы только недиагональные компоненты тензора напряжений), тензор деформаций будет иметь как недиагональные компоненты, связанные с характером приложенных напряжений, так и диагональные компоненты, связанные с дилатансией (появлением объемной деформации) за счет роста трещиноватости. В частном случае соосности тензоров деформации и поврежденности в главных осях этих тензоров, определяющее соотношение преобразуется к виду

$$\sigma_n = \lambda_0 I_1 - \frac{\gamma\Omega_n I_1^{(\Omega)}}{\xi^{(\Omega)}} + \left(2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_n^2 - \gamma\Omega_n^2\xi^{(\Omega)}\right)\varepsilon_n, \qquad (6)$$

где σ_n, ε_n, Ω_n – главные напряжения, деформации и поврежденности соответственно; $\xi^{(\Omega)} = \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}}$ – параметр, характеризующий тип напряженно-деформированного состояния поврежденного материала.

Необходимо отметить еще одну особенность данной модели, следующую из определяющих соотношений (3): изначально изотропный материал при произвольной конфигурации приложенных деформаций в общем случае становится ортотропным, с упругими модулями, зависящими от главных поврежденностей, вида напряженно-деформированного состояния и величины приложенных главных деформаций:

$$C_{11} = \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_1^2 - \gamma\Omega_1^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_1\Omega_1^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^4\varepsilon_1^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}},$$
$$C_{22} = \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_2^2 - \gamma\Omega_2^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_2\Omega_2^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_2^4\varepsilon_2^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}},$$
$$C_{33} = \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_3^2 - \gamma\Omega_3^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_3\Omega_3^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_3^4\varepsilon_3^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}}$$
$$C_{12} = \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_2\Omega_1\Omega_2^2 + \varepsilon_1\Omega_2\Omega_1^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^2\Omega_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}},$$
$$C_{13} = \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_3\Omega_1\Omega_3^2 + \varepsilon_1\Omega_3\Omega_1^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^2\Omega_3^2\varepsilon_1\varepsilon_3\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}},$$
$$C_{23} = \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_3\Omega_2\Omega_3^2 + \varepsilon_2\Omega_3\Omega_2^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_2^2\Omega_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}},$$
$$C_{44} = \frac{1}{2}\left(2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_3+\Omega_2)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_3+\Omega_2)^2\xi^{(\Omega)}}{4}\right),$$
$$C_{55} = \frac{1}{2}\left(2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_1+\Omega_3)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_1+\Omega_3)^2\xi^{(\Omega)}}{4}\right),$$
$$C_{66} = \frac{1}{2}\left(2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_1+\Omega_2)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_1+\Omega_2)^2\xi^{(\Omega)}}{4}\right).$$

Предельно допустимые значения главных поврежденностей, в отличие от классических моделей континуальной механики поврежденности, не всегда равны единице, а определяются из условий строгой локальной выпуклости потенциала (1). Подробно условия локальной выпуклости потенциала для различных конфигураций исходной трещиноватости рассмотрены в работе [46].

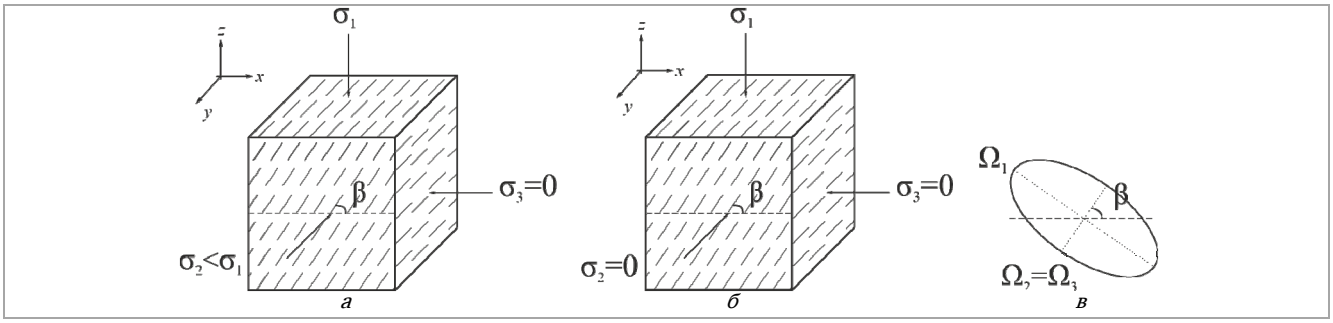


Рис. 2. Конфигурации напряжений, действующих на представительный объем, соответствующие условиям нагружения ленточного (*а*) и столбчатого (*б*) целиков; ориентация эллипсоида поврежденности в случае преимущественно ориентированной трещиноватости (*в*)

Постановка задачи

Для определения влияния преимущественной ориентации трещиноватости на напряженно-деформированное состояние целиков различного типа рассмотрим две конфигурации напряжений, действующих на представительный объем горной породы и соответствующих условиям нагружения ленточного и столбчатого целиков (рис. 2).

В случае ленточного целика представительный объем горной породы подвергается двухосному сжатию: максимальное главное напряжение σ_1 определяется весом вышележащих пород, промежуточное главное напряжение σ_2, в соответствии с гипотезой А.Н. Динника, равно $\sigma_2 = \frac{\upsilon}{1-\upsilon}\sigma_1$, где υ – коэффициент Пуассона, минимальное главное напряжение σ_3, действующее со стороны очистных камер, равно нулю (рис. 2, *а*). Для столбчатого целика условия нагружения соответствуют случаю одноосного сжатия, то есть на выбранный представительный объем действует только одно ненулевое главное напряжение (вес вышележащих пород), промежуточное и минимальное главные напряжения равны нулю ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) (рис. 2, *б*).

Рассматриваются два случая трещиноватости выбранного представительного объема: хаотично ориентированную (изотропную) трещиноватость и преимущественно ориентированную трещиноватость. Степень и ориентация трещиноватости определяется эллипсоидом поврежденности, вращение эллипсоида поврежденности допускается только вокруг оси OY. Средний уровень трещиноватости (поврежденности) α определяется через главные значения тензора поврежденности: $\alpha = \frac{1}{3}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2)$. В случае изотропной трещиноватости главные поврежденности равны, то есть $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \sqrt{\alpha}$, при преимущественно ориентированной трещиноватости имеем $\Omega_1 \gg \Omega_2 = \Omega_3$. Ориентация эллипсоида поврежденности во втором случае определяется углом $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ между осью OX и главной осью, соответствующей минимальной главной поврежденности Ω_3 (рис. 2, *в*). Таким образом, случай $\beta = 0^\circ$ соответствует горизонтально ориентированной трещиноватости, а случай $\beta = 90^\circ$ – вертикально ориентированной трещиноватости.

Расчеты проводятся в системе координат, совпадающей с главными осями тензора напряжений $\{x, y, z\}$. Для определения деформаций, вызванных приложенными напряжениями, при заданной величине средней поврежденности используются соотношения (6). Материальный параметр μ_1 определяется произведением дополнительного модуля упругости γ и критического параметра вида напряженно-деформированного состояния ξ_0. Параметр ξ_0 контролирует переход от залечивания микротрещин к их росту, определяется по результатам традиционных испытаний материала по схеме Кармана и связан с упругими модулями и углом внутреннего трения соотношением:

$$\xi_0 = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{9+2\,k^2\left(2+3\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)}}, \qquad (7)$$

где $k = \frac{\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$; φ – угол внутреннего трения.

Материальные параметры

Плотность, кг/м^3	Упругие модули, ГПа			Угол внутреннего трения, град	Критический параметр
ρ	λ_0	μ_0	γ	φ	ξ_0
2700	20	20	23,2	40	–0,8

В таблице представлены материальные параметры, использованные для расчета деформаций. Заданным параметрам Ламе соответствует коэффициент Пуассона $\upsilon = 0{,}25$.

Величина действующего вертикального напряжения в обоих случаях определяется для условия полной подработки горного массива:

$$\sigma_1 = \rho g H \frac{a+b}{b}, \qquad (8)$$

где $H = 800$ м – глубина до кровли очистной камеры; g – ускорение свободного падения; a – ширина очистной камеры; b – ширина целика.

Поскольку исследование влияния геометрии трещиноватого целика на его напряженно-деформированное состояние выходит за рамки настоящей работы, в расчетах параметры целика приняты равными $a = b = 5$ м. Для выбранных параметров вертикальное напряжение (максимальное главное напряжение) составит 43,2 МПа. Для сравнительного анализа рассматриваются две величины средней поврежденности – 0,15 и 0,3. При этом для расчета максимальной главной поврежденности в случае преимущественно ориентированной трещиноватости принимается $\Omega_2 = \Omega_3 = 10^{-4}$.

Результаты расчетов

Наиболее показательным с точки зрения влияния определенно ориентированной трещиноватости является изменение поперечных деформаций, являющихся промежуточной и минимальной главными деформациями. Анализ изменения максимальной главной деформации (вертикальной компоненты тензора деформации) для обоих случаев показал, что, по сравнению с хаотично ориентированной трещиноватостью, наличие преимущественной ориентации приводит к росту вертикальной деформации не более чем на 10 %.

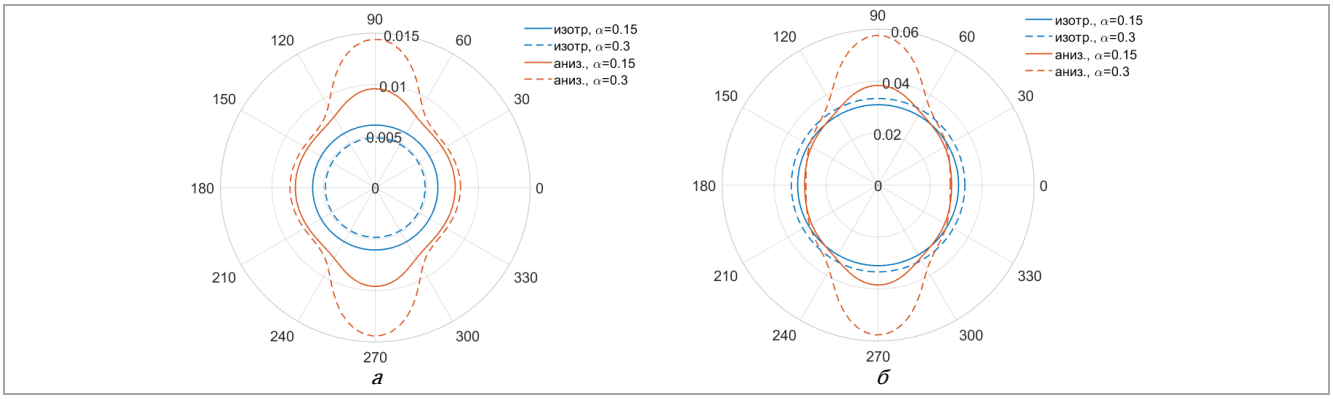


Рис. 3. Зависимости модулей промежуточной $\varepsilon_2 = \varepsilon_y$ (*а*) и минимальной $\varepsilon_3 = \varepsilon_x$ (*б*) главных деформаций для условий нагружения, соответствующих ленточному целику, двух ориентаций трещиноватости и двух уровней средней поврежденности

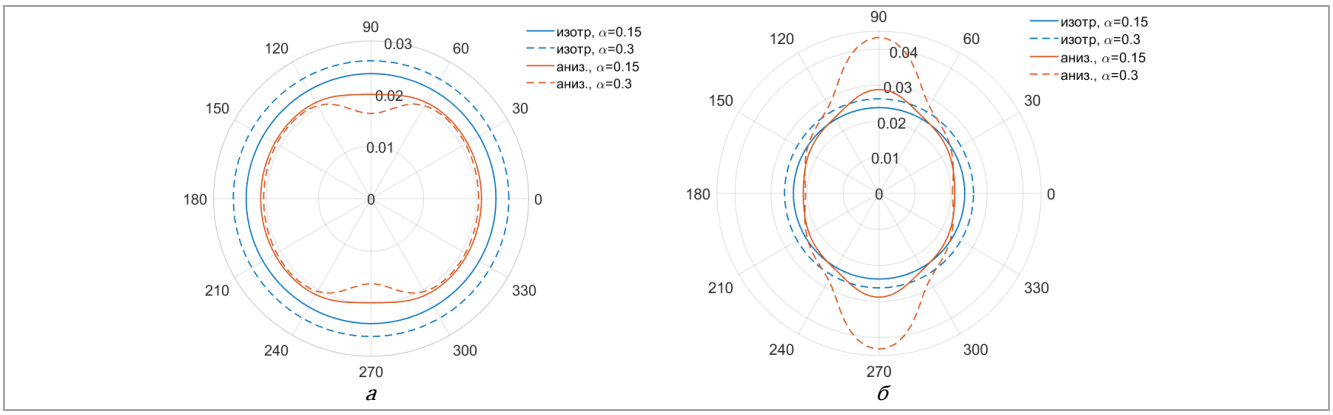


Рис. 4. Зависимости модулей промежуточной $\varepsilon_2 = \varepsilon_y$ (*а*) и минимальной $\varepsilon_3 = \varepsilon_x$ (*б*) главных деформаций для условий нагружения, соответствующих столбчатому целику, двух ориентаций трещиноватости и двух уровней средней поврежденности

На рис. 3 представлены зависимости модулей промежуточной $\varepsilon_2 = \varepsilon_y$ и минимальной $\varepsilon_3 = \varepsilon_x$ главных деформаций от угла наклона трещиноватости β для ленточного целика в случаях изотропной $(\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3)$ и анизотропной трещиноватости $(\Omega_1 \gg \Omega_2 = \Omega_3)$ при различных уровнях средней поврежденности α. Модуль деформаций используется для возможности визуализации зависимостей в полярных координатах. Знаки главных деформаций соответствуют конфигурации приложенных напряжений: максимальная главная деформация сжимающая, промежуточная главная деформация – сжимающая для случая ленточного целика и растягивающая для случая столбчатого целика, минимальная главная деформация – растягивающая в обоих случаях.

Из рис. 3 видно, что в случае хаотично ориентированной трещиноватости (изотропной поврежденности) зависимость главных деформаций от угла закономерно отсутствует. Величина главных деформаций определяется не только величиной действующих напряжений, но и уровнем средней поврежденности α. При наличии преимущественной ориентации трещиноватости зависимости главных деформаций от угла трещиноватости становятся нелинейными (красные линии на рис. 3). В интервале углов $90^\circ \pm \varphi$ наблюдается существенный рост обеих главных деформаций с максимумом при $\beta = 90^\circ$. Такое поведение физически обосновано: при вертикально ориентированной трещиноватости $(\beta = 90^\circ)$ происходит раскрытие микротрещин в направлении действия минимального напряжения, что дает дополнительный вклад в деформацию.

При средней поврежденности $\alpha = 0{,}15$ промежуточная главная деформация ε_2 в случае вертикально ориентированной трещиноватости превышает деформацию для изотропного случая в полтора раза (рис. 3, *а*), при $\alpha = 0{,}3$ – в 3,3 раза. Следует отметить, что даже в анизотропном случае по абсолютной величине промежуточная главная деформация остается крайне малой, и в инженерных расчетах допустимо использовать гипотезу плоскодеформированного состояния.

Аналогичные закономерности наблюдаются и для зависимостей минимальной главной деформации ε_3 от угла ориентации трещиноватости (рис. 3, *б*). При $\alpha = 0{,}15$ и вертикально ориентированной трещиноватости отклонение от случая изотропной поврежденности составляет 30 % , для средней поврежденности $\alpha = 0{,}3$ – 73 %. При этом для горизонтально ориентированной трещиноватости $(\beta = 90^\circ)$ различие между изотропным и анизотропным случаями незначительное.

На рис. 4 представлены зависимости модулей промежуточной и минимальной главных деформаций от угла наклона трещиноватости β для конфигурации приложенных напряжений, соответствующей столбчатому целику. В случае столбчатого целика промежуточное главное напряжение действует в направлении простирания трещин, поэтому соответствующая главная деформация слабо зависит от угла их ориентации даже при анизотропной поврежденности. Необходимо отметить, что по абсолютной величине промежуточная главная деформация в случае анизотропной поврежденности ниже, чем при хаотично ориентированных трещинах (рис. 4, *а*). Это связано с нелинейной формой определяющих соотношений (6) и вкладом всех трех главных поврежденностей в каждое из главных напряжений.

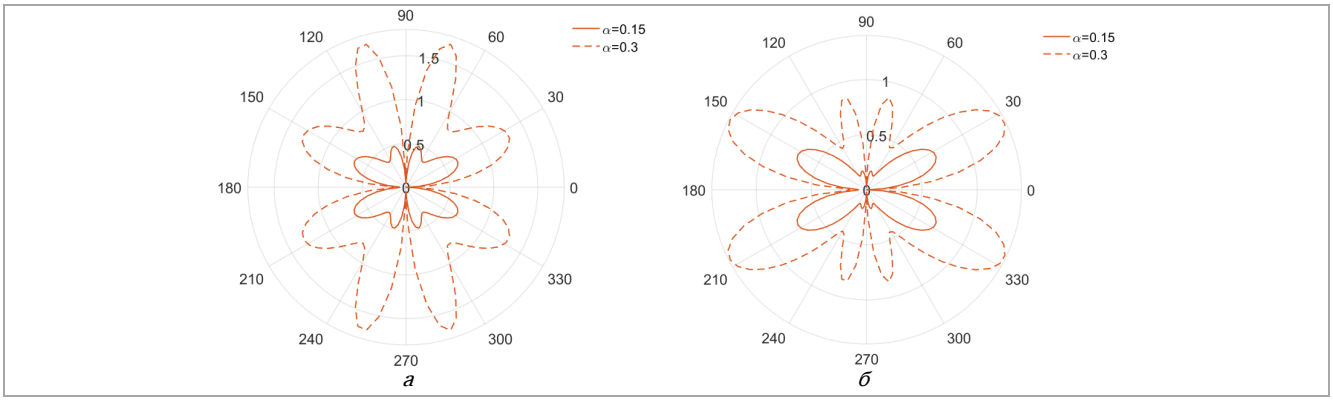


Рис. 5. Зависимости угла между осями максимального главного напряжения и максимальной главной деформации от угла наклона трещиноватости для случая ленточного (*а*) и столбчатого (*б*) целиков и различных уровней средней поврежденности

Зависимости минимальной главной деформации от угла наклона трещиноватости в случае столбчатого целика имеют характерный вид, аналогичный описанному выше для ленточного целика. Для вертикально ориентированной трещиноватости наблюдается наибольшее отклонение величины деформации от изотропного случая. При средней поврежденности $\alpha = 0{,}15$ это отклонене не превышает 25 %, тогда как при $\alpha = 0{,}3$ достигает 70 %.

Для оценки влияния угла преимущественной ориентации трещиноватости и уровня средней поврежденности на несоосность тензоров напряжений и деформации были построены зависимости угла между осями максимального главного напряжения и максимальной главной деформации от угла ориентации поврежденности (рис. 5).

Анализ полученных зависимостей позволяет сделать несколько выводов. Во-первых, степень несоосности тензоров напряжения и деформаций зависит как от конфигурации приложенных напряжений, так и от уровня средней поврежденности. С ростом средней поврежденности растет степень несоосности. Во-вторых, как для ленточного, так и для столбчатого целиков можно выделить интервалы изменений ориентации трещиноватости, характеризующиеся более существенной несоосностью – отклонением ориентации главных напряжений от ориентации главных деформаций. Эти интервалы определяются углом внутреннего трения. Максимальная несоосность в случае столбчатого целика наблюдается при угле наклона трещиноватости $\beta = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \pi n$, а в случае ленточного – при $\beta = \frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{3}{4}\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \pi n$. При этом, несмотря на выраженный нелинейный характер зависимости, по абсолютной величине угол между осями главных напряжений и главных деформаций не превышает 2°.

Проведенное моделирование показывает необходимость учета анизотропии трещиноватости, ориентация которой близка к направлению действия максимального главного напряжения, для корректного проектирования систем разработки на больших глубинах и оценки несущей способности целиков, особенно в условиях тектонически нарушенных массивов.

Заключение

В работе выполнено математическое моделирование влияния преимущественной трещиноватости на напряженно-деформированное состояние представительного объема геосреды при конфигурациях приложенных напряжений, соответствующих условиям нагружения ленточного и столбчатого целиков при подземной разработке рудных месторождений. Для описания деформационного поведения трещиноватых горных пород использована нелинейная модель механики поврежденной среды с тензорным параметром поврежденности, учитывающая индуцированную трещиноватостью анизотропию, зависимость упругих свойств от вида напряженного состояния и дилатансию.

Проведенный сравнительный анализ результатов численных расчетов для случаев хаотически ориентированной трещиноватости и преимущественно ориентированной трещиноватости позволил сделать следующие выводы:

1. Наличие преимущественно ориентированной трещиноватости существенно влияет на деформационное поведение целиков обоих типов. В интервале углов наклона трещиноватости $90^\circ \pm \varphi$ минимальная главная деформация возрастает более чем на 70 % относительно случая изотропной трещиноватости. Абсолютное значение этой деформации определяется уровнем действующих напряжений и уровнем средней поврежденности.

2. Для обоих типов целиков наибольший эффект наблюдается в случае вертикально ориентированной трещиноватости, что физически обосновано дополнительным вкладом в поперечную деформацию целика за счет суммарного раскрытия микротрещин.

3. В случае преимущественно ориентированной трещиноватости имеет место несоосность тензоров напряжений и деформаций, величина которой зависит от уровня средней поврежденности и ориентации трещин. Максимальный угол рассогласования не превышает 2°.

Предложенная модель и результаты расчетов могут быть использованы для совершенствования методик проектирования горных работ и повышения безопасности подземной добычи полезных ископаемых.

Библиографический список

1. Idris, M.A. Stochastic assessment of pillar stability at Laisvall mine using Artificial Neural Network / M.A. Idris, D. Saiang, E. Nordlund // Tunnelling and Underground Space Technology. – 2015. – Vol. 49. – P. 307–319. DOI: 10.1016/j.tust.2015.05.003
2. Ghasemi, E. Stability assessment of hard rock pillars using two intelligent classification techniques: A comparative study / E. Ghasemi, H. Kalhori, R. Bagherpour // Tunnelling and Underground Space Technology. – 2017. – Vol. 68. – P. 32–37/ DOI: 10.1016/j.tust.2017.05.012
3. Зубков, А.В. Новые подходы к оценке устойчивости скальных массивов горных пород / А.В. Зубков, С.В. Сентябов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2020. – № 3–1. – С. 68–77. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-31-0-68-77
4. Kim, J.-G. Robust design of pillar arrangement for safe room-and-pillar mining method / J.-G. Kim, M.A.M. Ali, H.-S. Yang // Geotechnical and Geological Engineering. – 2019. – Vol. 3. – P. 1931–1942. DOI: 10.1007/s10706-018-0734-1

5. Geomechanical evaluation of roof-and-pillar parameters in transition to underground mining / A.B. Makarov, I.S. Livinsky, I.Y. Rasskazov [et al.] // Journal of Mining Science. – 2016. – Vol. 52 (3). – P. 438–447. DOI: 10.1134/S1062739116030633
6. Протосеня, А.Г. Методика прогнозирования напряженно-деформированного состояния горного массива при комбинированной разработке Коашвинского месторождения / А.Г. Протосеня, А.Б. Куранов // Горный журнал. – 2015. – № 1. – С. 17–20. DOI: 10.17580/gzh.2015.01.03
7. Protosenya, A.G. 3D modeling of pillar parameters in ore mining with room-and-pillar method / A.G. Protosenya, A.N. Shokov // Gornyi Zhurnal. – 2015. – Vol. 11. – P. 20–23. DOI: 10.17580/gzh.2015.11.04
8. Protosenya, A.G. Geomechanical models and prognosis of stress-strain behavior of rock ore in development of unique deposits of rich iron ores under water-bearing formations / A.G. Protosenya, V.L. Trushko // Biosciences, Biotechnology Research. – 2015. – Vol. 12 (3). – P. 2879–2888. DOI: 10.13005/bbra/1973
9. Цвелодуб, И.Ю. О разномодульной теории упругости / И.Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 157–164. DOI: 10.1007/s10808-008-0019-1
10. Ye, Z.M. A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loading / Z.M. Ye, H.R. Yu, W.J. Yao // J. Shanghai Univ. – 2001. – Vol. 5. – P. 89–92. DOI: 10.1007/s11741-001-0001-0
11. Ломакин, Е.В. Определяющие соотношения для материалов со свойствами, зависящими от вида деформированного состояния / Е.В. Ломакин, П.В. Тишин // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2021. – № 1. – С. 52–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.06
12. Ломакин, Е.В. Поля напряжений вблизи кругового отверстия в пористой среде в условиях плоской деформации / Е.В. Ломакин, Н.Г. Минаев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 3. – С. 39–47. DOI: 10.31857/S0572329920030083
13. Модель накопления повреждений угольнопородного массива у дегазационных скважин угольных шахт / К.Х. Ли, В.Г. Казанцев, О.В. Тайлаков [и др.] // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2024. – № 1 (161). – С. 52–65. DOI: 10.26730/1999-4125-2024-1-52-65
14. Arson, C. On the definition of damage in time-dependent healing models for salt rock / C. Arson, H. Xu, F.M. Chester // Géotechnique Letters. – 2012. – Vol. 2. – P. 67–71. DOI: 10.1680/geolett.12.00013
15. Bennett, K.C. Hyperelastoplastic/damage modeling of rock with application to porous limestone / K.C. Bennett, R.I. Borja // International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Vol. 143. – P. 218–231. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.03.011
16. Voyiadjis, G.Z. Some basic issues of isotropic and anisotropic continuum damage mechanics / G.Z. Voyiadjis, P.I. Kattan, M.A. Yousef // Handbook of Damage Mechanics. – Berlin: Springer, 2015. – P. 3–42. DOI: 10.1007/978-1-4614-8968-9_1-1
17. Induced anisotropic damage and plasticity in initially anisotropic sedimentary rocks / L. Chen, J. Shao, Q-Z. Zhu, G. Duveau // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2012. – Vol. 51. – P. 13–23. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2012.01.013
18. Вербило, П.Э. Изучение анизотропии прочности и масштабного эффекта трещиноватого массива горных пород / П.Э. Вербило, М.А. Вильнер // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2022. – № 6–2. – С. 47–59. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_62_0_47
19. Protosenya, A. Introduction of the method of finite-discrete elements into the Abaqus/Explicit software complex for modeling deformation and fracture of rocks / A. Protosenya, M. Karasev, V. Ochkurov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 6, no. 7 (90). – P. 11–18. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.116692
20. Khan, G.N. Discrete element modeling of rock failure dynamics / G.N. Khan // Journal of Mining Science. – 2012. – Vol. 48, no. 1. – P. 96–102. DOI: 10.1134/S1062739148010108
21. Журавков, М.А. Механико-математические модели одного типа блочных элементов для задач подземной геомеханики / М.А. Журавков, М.А. Николайчик, Ш. Чжан // Механика машин, механизмов и материалов. – 2023. – № 3 (64). – С. 73–82. DOI: 10.46864/1995-0470-2023-3-64-73-82
22. Гиляров, В.Л. О степенных распределениях локальных деформаций и напряжений при разрушении гетерогенных материалов в методе дискретных элементов / В.Л. Гиляров, Е.Е. Дамаскинская // Физика твердого тела. – 2025. – Т. 67, № 2. – С. 377–381. DOI: 10.61011/FTT.2025.02.59995.10-25
23. Дамаскинская, Е.Е. Особенности эволюции дефектной структуры в модели дискретных элементов / Е.Е. Дамаскинская, В.Л. Гиляров // Физика твердого тела. – 2024. – Т. 66, № 1. – С. 142–148 DOI: 10.61011/FTT.2024.01.56950.233
24. Связанная модель флюидонасыщенных пористых материалов, основанная на совмещении дискретного и континуального подходов / А.В. Димаки, Е.В. Шилько, С.В. Астафуров [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 4. – С. 68–101. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.03
25. Астафуров, С.В. Исследование влияния параметров напряженного состояния фрагментов разломных зон на особенности их механического отклика при сдвиговом деформировании / С.В. Астафуров, Е.В. Шилько, С.Г. Псахье // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 76–101. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.2.04
26. A coupled discrete element-finite difference approach for modeling mechanical response of fluid-saturated porous materials / S.G. Psakhie, A.V. Dimaki, E.V. Shilko, S.V. Astafurov // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2016. – Vol. 106, no. 8. – P. 623–643. DOI: 10.1002/nme.5134
27. Approach to simulation of deformation and fracture of hierarchically organized heterogeneous media, including contrast media / S.G. Psakhie, E.V. Shilko, A.Y. Smolin [et al.] // Physical Mesomechanics. – 2011. – Vol. 14, no. 5–6. – P. 224–248. DOI: 10.1016/j.physme.2011.12.003
28. Гузев, М.А. Принципы построения континуальной модели иерархически-блочной геосреды / М.А. Гузев, В.Н. Одинцев, В.В. Макаров // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2021. – Т. 8, № 1. – С. 42–52. DOI: 10.15372/FPVGN2021080106
29. Guzev, M.A. Construction of nonsingular stress fields for non-euclidean model in planar deformations / M.A. Guzev, E.P. Riabokon // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 14, no. 6. – P. 815–821. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-6-815-821
30. Ксендзенко, Л.С. Математическая модель массива горных пород, подверженного зональному разрушению вокруг незакрепленной горной выработки кругового сечения, пройденной на большой глубине / Л.С. Ксендзенко // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. – 2018. – № 3 (36). – С. 3–13. DOI: 10.5281/zenodo.1408215
31. Макаров, В.В. Об одном подходе к моделированию иерархически-блочной геосреды / В.В. Макаров // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2019. – № S23. – С. 9–18. DOI: 10.25018/0236-1493-2019-7-23-9-18
32. Гузев, М.А. Неевклидова модель зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки / М.А. Гузев, А.А. Парошин // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 1 (245). – С. 147–156. DOI: 10.1023/A:1018877015940
33. Гузев, М.А. Реализация подхода физической мезомеханики при моделировании геосреды / М.А. Гузев, В.В. Макаров // Физическая мезомеханика. – 2020. – Т. 23, № 6. – С. 25–32. DOI: 10.24411/1683-805X-2020-1600
34. Non-linear anisotropic damage rheology model: theory and experimental verification / I. Panteleev, V. Lyakhovsky, J. Browning [et al.] // European journal of mechanics: A. Solids. – 2021. – Vol. 85. – P. 104085. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2020.104085
35. Пантелеев, И.А. Ориентация трещиноватости в хрупком твердом теле при традиционном трехосном сжатии / И.А. Пантелеев, В.А. Ляховский // Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела. – 2022. – № 4. – С. 133–155. DOI: 10.31857/S0572329922040092
36. Пантелеев, И.А. Ориентация зоны локализованной поврежденности в хрупком твердом теле при истинном трехосном сжатии / И.А. Пантелеев, Д.В. Ложкин, В.А. Ляховский // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 5. – С. 187–209. DOI: 10.31857/S1026351924050116
37. Hamiel, Y. Rock dilation, nonlinear deformation, and pore pressure change under shear / Y. Hamiel, V. Lyakhovsky, A. Agnon // Eatrh. Planet. Sci. Lett. – 2005. – Vol. 237. – P. 577–589. DOI: 10.1016/j.epsl.2005.06.028
38. Hamiel, Y. Poroelastic damage rheology: Dilation, compaction, and failure of rocks / Y. Hamiel, V. Lyakhovsky, A. Agnon // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. – 2005. – Vol. 6, no. 1. – P. Q01008. DOI: 10.1029/2004GC000813
39. Lyakhovsky, V. Distributed damage, faulting, and friction / V. Lyakhovsky, Y. Ben-Zion, A. Agnon // J. Geophys. Res. – 1997. – Vol. 102, no. B12. – P. 27635–27649. DOI: 10.1029/97JB01896
40. Non-linear elastic behaviour of damaged rocks / V. Lyakhovsky, Z. Reches, R. Weinbeger [et al.] // Geophysical Journal International. – 1997. – Vol. 130, no. 1. – P. 157–166. DOI: 10.1111/J.1365-246X.1997.TB00995.X
41. Lyakhovsky, V. Visco-poroelastic damage model for brittle-ductile failure of porous rocks / V. Lyakhovsky, W. Zhu, E. Shalev // J. Geophys. Res. Solid Earth. – 2015. – Vol. 120, no. 4. – P. 2179–2199. DOI:10.1002/2014JB011805
42. Lyakhovsky, V. A viscoelastic damage rheology and rate-and state-dependent friction / V. Lyakhovsky, Y. Ben-Zion, A. Agnon // Geophys. J. Int. – 2005. – Vol. 161. – P. 179–190. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2005.02583.x
43. Hamiel, Y. Coupled evolution of damage and porosity in poroelastic media: theory and applications to deformation of porous rocks / Y. Hamiel, V. Lyakhovsky, A. Agnon // Geophysical Journal International. – 2004. – Vol. 156, no. 3. – P. 701–713. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2004.02172.x
44. Lyakhovsky, V. Damage evolution and fluid flow in poroelastic rock / V. Lyakhovsky, Y. Hamiel // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. – 2007. – Vol. 43, no. 1. – P. 13–23. DOI: 10.1134/S106935130701003X
45. Степанова, Л.В. Параметр поврежденности Ю.Н. Работнова и описание длительного разрушения: результаты, современное состояние, приложение к механике трещин и перспективы / Л.В. Степанова, С.А. Игонин // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 2 (330). – С. 133–145. DOI: 10.15372/PMTF20150214
46. Пантелеев, И.А. О выпуклости потенциала модели нелинейной упругой среды с тензорным параметром поврежденности / И.А. Пантелеев, В. Ляховский // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2022. – № 1. – С. 89–101. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.08

References

1. Idris M.A., Saiang D., Nordlund E. Stochastic assessment of pillar stability at Laisvall mine using Artificial Neural Network. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2015, vol. 49, pp. 307-319. DOI: 10.1016/j.tust.2015.05.003
2. Ghasemi E., Kalhori H., Bagherpour R. Stability assessment of hard rock pillars using two intelligent classification techniques: A comparative study. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2017, vol. 68, pp. 32-37. DOI: 10.1016/j.tust.2017.05.012
3. Zubkov A.V., Sentiabov S.V. Novye podkhody k otsenke ustoichivosti skal'nykh massivov gornykh porod [New approaches to the assessment of stability of rock rock arrays]. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal)*, 2020, no. 3-1, pp. 68-77. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-31-0-68-77
4. Kim J.-G., Ali M.A.M., Yang H.-S. Robust design of pillar arrangement for safe room-and-pillar mining method. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2019, vol. 3, pp. 1931-1942. DOI: 10.1007/s10706-018-0734-1
5. Makarov A.B., Livinsky I.S., Rasskazov I.Y. et al. Geomechanical evaluation of roof-and-pillar parameters in transition to underground mining. *Journal of Mining Science*, 2016, vol. 52 (3), pp. 438-447. DOI: 10.1134/S1062739116030633
6. Protosenia A.G., Kuranov A.B. Metodika prognozirovaniia napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia gornogo massiva pri kombinirovannoi razrabotke Koashvinskogo mestorozhdeniia [Procedure of rock mass stress–strain state forecasting in hybrid mining of the Koashvin deposit]. *Gornyi zhurnal*, 2015, no. 1, pp. 17-20. DOI: 10.17580/gzh.2015.01.03

7. Protosenya A.G., Shokov A.N. 3D modeling of pillar parameters in ore mining with room-and-pillar method. *Gornyi Zhurnal*, 2015, vol. 11, pp. 20-23. DOI: 10.17580/gzh.2015.11.04
8. Protosenya A.G., Trushko V.L. Geomechanical models and prognosis of stress-strain behavior of rock ore in development of unique deposits of rich iron ores under water-bearing formations. *Biosciences, Biotechnology Research*, 2015, vol. 12 (3), pp. 2879-2888. DOI: 10.13005/bbra/1973
9. Tsvelodub I.Iu. O raznomodul'noi teorii uprugosti [Multimodulus elasticity theory]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika*, 2008, vol. 49, no. 1, pp. 157-164. DOI: 10.1007/s10808-008-0019-1
10. Ye Z.M., Yu H.R., Yao W.J. A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loading. *J. Shanghai Univ.*, 2001, vol. 5, pp. 89-92. DOI: 10.1007/s11741-001-0001-0
11. Lomakin E.V., Tishin P.V. Opredeliaiushchie sootnosheniia dlia materialov so svoistvami, zavisiashchimi ot vida deformirovannogo sostoianiia [Constitutive relations for materials with strain state dependent properties]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2021, no. 1, pp. 52-62. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.06
12. Lomakin E.V., Minaev N.G. Polia napriazhenii vblizi krugovogo otverstiia v poristoi srede v usloviiakh ploskoi deformatsii [Stress Fields near a Circular Hole in a Porous Medium Under Plane Deformation]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2020, no. 3, pp. 39-47. DOI: 10.31857/S0572329920030083
13. Li K.Kh., Kazantsev V.G., Tailakov O.V. et al. Model' nakopleniia povrezhdenii ugol'noporodnogo massiva u degazatsionnykh skvazhin ugol'nykh shakht [Coal formation damage accumulation model at coal mine degassing wells]. *Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2024, no. 1 (161), pp. 52-65. DOI: 10.26730/1999-4125-2024-1-52-65
14. Arson C., Xu H., Chester F.M. On the definition of damage in time-dependent healing models for salt rock. *Géotechnique Letters*, 2012, vol. 2, pp. 67-71. DOI: 10.1680/geolett.12.00013
15. Bennett K.C., Borja R.I. Hyperelastoplastic/damage modeling of rock with application to porous limestone. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 143, pp. 218-231. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.03.011
16. Voyiadjis G.Z., Kattan P.I., Yousef M.A. Some basic issues of isotropic and anisotropic continuum damage mechanics. *Handbook of Damage Mechanics*. Berlin: Springer, 2015, pp. 3-42. DOI: 10.1007/978-1-4614-8968-9_1-1
17. Chen L., Shao J., Zhu Q-Z., Duveau G. Induced anisotropic damage and plasticity in initially anisotropic sedimentary rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2012, vol. 51, pp. 13-23. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2012.01.013
18. Verbilo P.E., Vil'ner M.A. Izuchenie anizotropii prochnosti i masshtabnogo effekta treshchinovatogo massiva gornykh porod [Study of the jointed rock mass uniaxial compression strength anisotropy and scale effect]. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal)*, 2022, no. 6-2, pp. 47-59. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_62_0_47
19. Protosenya A., Karasev M., Ochkurov V. Introduction of the method of finite-discrete elements into the Abaqus/Explicit software complex for modeling deformation and fracture of rocks. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2017, vol. 6, no. 7 (90), pp. 11-18. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.116692
20. Khan G.N. Discrete element modeling of rock failure dynamics. *Journal of Mining Science*, 2012, vol. 48, no. 1, pp. 96-102. DOI: 10.1134/S1062739148010108
21. Zhuravkov M.A., Nikolaichik M.A., Chzhan Sh. Mekhaniko-matematicheskie modeli odnogo tipa blochnykh elementov dlia zadach podzemnoi geomekhaniki [Mechanical and mathematical models of one type of block elements for problems of underground geomechanics]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov*, 2023, no. 3 (64), pp. 73-82. DOI: 10.46864/1995-0470-2023-3-64-73-82
22. Giliarov V.L., Damaskinskaia E.E. O stepennykh raspredeleniiakh lokal'nykh deformatsii i napriazhenii pri razrushenii geterogennykh materialov v metode diskretnykh elementov [On the power law distributions of local stresses and strains in the fracture process of heterogeneous materials revealed via discrete element method]. *Fizika tverdogo tela*, 2025, vol. 67, no. 2, pp. 377-381. DOI: 10.61011/FTT.2025.02.59995.10-25
23. Damaskinskaia E.E., Giliarov V.L. Osobennosti evoliutsii defektnoi struktury v modeli diskretnykh elementov [Features of the evolution of a defect structure in a discrete element model]. *Fizika tverdogo tela*, 2024, vol. 66, no. 1, pp. 142-148 DOI: 10.61011/FTT.2024.01.56950.233
24. Dimaki A.V., Shil'ko E.V., Astafurov S.V. et al. Sviazannaia model' fliuidonasyshchennykh poristykh materialov, osnovannaia na sovmeshchenii diskretnogo i kontinual'nogo podkhodov [Coupled model of fluid-saturated porous materials based on a combination of discrete and continuum approaches]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2014, no. 4, pp. 68–101. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.03
25. Astafurov S.V., Shil'ko E.V., Psakh'e S.G. Issledovanie vliianiia parametrov napriazhennogo sostoianiia fragmentov razlomnykh zon na osobennosti ikh mekhanicheskogo otklika pri sdvigovom deformirovanii [Investigation of influence of stress state parameters of fault zones on peculiarities of their mechanical response under shear loading]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2014, no. 2, pp. 76-101. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.2.04
26. Psakhie S.G., Dimaki A.V., Shilko E.V., Astafurov S.V. A coupled discrete element-finite difference approach for modeling mechanical response of fluid-saturated porous materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, vol. 106, no. 8, pp. 623-643. DOI: 10.1002/nme.5134
27. Psakhie S.G., Shilko E.V., Smolin A.Y. et al. Approach to simulation of deformation and fracture of hierarchically organized heterogeneous media, including contrast media. *Physical Mesomechanics*, 2011, vol. 14, no. 5-6, pp. 224-248. DOI: 10.1016/j.physme.2011.12.003
28. Guzev M.A., Odintsev V.N., Makarov V.V. Printsipy postroeniia kontinual'noi modeli ierarkhicheski-blochnoi geosredy [Constructing continuos model of hierarchical block geomedium]. *Fundamental'nye i prikladnye voprosy gornykh nauk*, 2021, vol. 8, no. 1, pp. 42-52. DOI: 10.15372/FPVGN2021080106
29. Guzev M.A., Riabokon E.P. Construction of nonsingular stress fields for non-euclidean model in planar deformations. *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics*, 2021, vol. 14, no. 6, pp. 815-821. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-6-815-821
30. Ksendzenko L.S. Matematicheskaia model' massiva gornykh porod, podverzhennogo zonal'nomu razrusheniiu vokrug nezakreplennoi gornoi vyrabotki krugovogo secheniia, proidennoi na bol'shoi glubine [A mathematical model of a massif of rocks in the conditions of zonal failure around an unlined deep circular opening]. *Vestnik Inzhenernoi shkoly Dal'nevostochnogo federal'nogo universiteta*, 2018, no. 3 (36), pp. 3-13. DOI: 10.5281/zenodo.1408215
31. Makarov V.V. Ob odnom podkhode k modelirovaniiu ierarkhicheski-blochnoi geosredy [On one approach to modeling a hierarchical-block geoenvironment]. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal)*, 2019, no. S23, pp. 9-18. DOI: 10.25018/0236-1493-2019-7-23-9-18
32. Guzev M.A., Paroshin A.A. Neevklidova model' zonal'noi dezintegratsii gornykh porod vokrug podzemnoi vyrabotki [Non–Euclidean Model of the Zonal Disintegration of Rocks around an Underground Working]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika*, 2001, vol. 42, no. 1 (245), pp. 147-156. DOI: 10.1023/A:1018877015940
33. Guzev M.A., Makarov V.V. Realizatsiia podkhoda fizicheskoi mezomekhaniki pri modelirovanii geosredy [Physical mesomechanics approach to modeling the Earth's subsurface]. *Fizicheskaia mezomekhanika*, 2020, vol. 23, no. 6, pp. 25-32. DOI: 10.24411/1683-805X-2020-16002
34. Panteleev I., Lyakhovsky V., Browning J. et al. Non-linear anisotropic damage rheology model: theory and experimental verification. *European journal of mechanics: A. Solids*, 2021, vol. 85, 104085 p. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2020.104085
35. Panteleev I.A., Liakhovskii V.A. Orientatsiia treshchinovatosti v khrupkom tverdom tele pri traditsionnom trekhosnom szhatii [Orientation of cracks in a brittle solid under traditional triaxial compression]. *Izvestiia Rossiiskoi Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2022, no. 4, pp. 133-155. DOI: 10.31857/S0572329922040092
36. Panteleev I.A., Lozhkin D.V., Liakhovskii V.A. Orientatsiia zony lokalizovannoi povrezhdennosti v khrupkom tverdom tele pri istinnom trekhosnom szhatii [Orientation of the Localized Damage Zone in Brittle Solid under True Triaxial Compression]. *Izvestiia Rossiiskoi Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2024, no. 5, pp. 187-209. DOI: 10.31857/S0126351924050116
37. Hamiel Y., Lyakhovsky V., Agnon A. Rock dilation, nonlinear deformation, and pore pressure change under shear. *Eatrh. Planet. Sci. Lett.*, 2005, vol. 237, pp. 577-589. DOI: 10.1016/j.epsl.2005.06.028
38. Hamiel Y., Lyakhovsky V., Agnon A. Poroelastic damage rheology: Dilation, compaction, and failure of rocks. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2005, vol. 6, no. 1, Q01008 p. DOI: 10.1029/2004GC000813
39. Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A. Distributed damage, faulting, and friction. *J. Geophys. Res.*, 1997, vol. 102, no. B12, pp. 27635-27649. DOI: 10.1029/97JB01896
40. Lyakhovsky V., Reches Z., Weinbeger R. et al. Non-linear elastic behaviour of damaged rocks. *Geophysical Journal International*, 1997, vol. 130, no. 1, pp. 157-166. DOI: 10.1111/J.1365-246X.1997.TB00995.X
41. Lyakhovsky V., Zhu W., Shalev E. Visco-poroelastic damage model for brittle-ductile failure of porous rocks. *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 2015, vol. 120, no. 4, pp. 2179-2199. DOI:10.1002/2014JB011805
42. Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A. A viscoelastic damage rheology and rate-and state-dependent friction. *Geophys. J. Int.*, 2005, vol. 161, pp. 179-190. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2005.02583.x
43. Hamiel Y., Lyakhovsky V., Agnon A. Coupled evolution of damage and porosity in poroelastic media: theory and applications to deformation of porous rocks. *Geophysical Journal International*, 2004, vol. 156, no. 3, pp. 701-713. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2004.02172.x
44. Lyakhovsky V., Hamiel Y. Damage evolution and fluid flow in poroelastic rock. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2007. vol. 43, no. 1, pp. 13-23. DOI: 10.1134/S106935130701003X
45. Stepanova L.V., Igonin S.A. Parametr povrezhdennosti Iu.N. Rabotnova i opisanie dlitel'nogo razrusheniia: rezul'taty, sovremennoe sostoianie, prilozhenie k mekhanike treshchin i perspektivy [Y.N. Rabotnov's damage parameter and description of long-term fracture: results, current state, application to crack mechanics and prospects]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika*, 2015, vol. 56, no. 2 (330), pp. 133-145. DOI: 10.15372/PMTF20150214
46. Panteleev I.A., Liakhovskii V. O vypuklosti potentsiala modeli nelineinoi uprugoi sredy s tenzornym parametrom povrezhdennosti [On the convexity of potential of nonlinear elastic media model with tensor damage parameter]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2022, no. 1, pp. 89-101. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.08

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 19-77-30008.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.